Invent. math. 84, 141–156 (1986)

Inventiones mathematicae

Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières

Pierre Arnoux[1] et Gilbert Levitt[2]

[1] Faculté des sciences de Reims, Moulin de la Housse, BP 347, F-51062 Reims Cedex, France
[2] UER de Mathématiques, Université Paris 7, 2 Place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France

Summary. We study the relations between the de Rham cohomology class of a closed differential 1-form ω with Morse singularities on a manifold M of dimension $n \geqq 3$, and the ergodic properties of the foliation F_ω it defines. We show by examples that, if the fundamental group is "large" enough, very different behaviours can occur in the same class. In contrast, if the fundamental group admits no surjective homomorphism onto the free group on 3 generators, then F_ω is always uniquely ergodic provided it has no compact leaf; if the natural homomorphism $\pi_1(M) \to H_1(M, Z)$/torsion does not factor through a free group, then the same result is true in almost every cohomology class. We also give results about the existence of non-compact leaves and the number of ergodic measures.

0. Introduction et énoncé des résultats

De nombreux auteurs se sont demandé dans quelle mesure la donnée de la classe de cohomologie $[\omega]$ d'une 1-forme différentielle fermée non singulière ω suffit à déterminer cette forme à isotopie près ([La], [BL], [QR], [Si], et les références données dans ces articles).

En tout état de cause, remarquons que la donnée de $[\omega]$ permet de préciser l'aspect qualitatif du feuilletage déterminé par ω. Si le groupe des périodes de ω est de rang 1, toutes les feuilles de ω sont compactes. Si ce groupe est de rang au moins 2 (i.e. si ω possède au moins 2 périodes rationnellement indépendantes), on vérifie facilement que ω est *minimale* et *uniquement ergodique:* d'une part toutes les feuilles de ω sont denses, d'autre part la mesure transverse définie par ω est, à proportionnalité près, la seule mesure transverse invariante du feuilletage.

Nous voulons ici étudier dans quelle mesure ces propriétés se généralisent aux 1-formes fermées singulières. Nous supposerons toujours que les formes ont des *singularités de Morse* (localement ω est la différentielle d'une fonction de Morse), et que nous sommes sur une *variété fermée orientable M^n de* *dimension* $n \geqq 3$ (le cas des surfaces est tout à fait particulier, voir remarque 1.4.2 ci-dessous).

On notera qu'il existe des 1-formes fermées à singularités de Morse sur toute variété (et dans toute classe de cohomologie de de Rham), alors que seules les variétés qui fibrent sur le cercle possèdent des formes fermées non singulières [Ti].

Dans une forme singulière minimale on peut toujours par une modification locale introduire des feuilles compactes sans changer la classe de cohomologie. Les principaux résultats que nous puissions attendre de la donnée de $[\omega]$ seront donc de savoir si toute forme cohomologue à une forme minimale ω possède des feuilles régulières non compactes, ou si toute forme minimale cohomologue à ω est uniquement ergodique.

Nous verrons que les réponses dépendent essentiellement de $\pi_1(M)$, et plus précisément de ce qu'on pourrait appeler le *premier nombre de Betti non commutatif* $b_1'(M)$: le plus grand entier p tel qu'il existe un homomorphisme surjectif de $\pi_1(M)$ sur le groupe libre à p générateurs. En règle générale, *plus* $b_1'(M)$ *est petit, et plus la donnée de* $[\omega]$ *permet de dire des choses précises sur* ω.

Voici quelques illustrations de ce principe. Si $\pi_1(M)$ est libre, on ne peut en général rien dire (théorème 2). Si l'homomorphisme naturel $p_M: \pi_1(M) \to H_1(M, Z)$/torsion ne peut pas se factoriser par un groupe libre (i.e. si $b_1'(M) < b_1(M)$), alors on peut montrer dans presque toute classe de cohomologie que toute forme possède des feuilles non compactes et que toute forme minimale est uniquement ergodique (corollaires 6 et 7). S'il n'existe pas d'épimorphisme de $\pi_1(M)$ dans $Z * Z * Z$ (i.e. si $b_1'(M) \leqq 2$), alors toute forme minimale est uniquement ergodique (théorème 4). Si on impose à $\pi_1(M)$ des conditions plus fortes, alors les formes définies sur M ont une structure transverse très riche qui les fait ressembler encore plus à des formes non singulières (voir [Le3]).

Voyons maintenant les choses plus en détail. Nous commencerons par construire des exemples, de façon à montrer les résultats suivants:

Théorème 1. *Si* ω *possède au moins deux périodes rationnellement indépendantes, alors* ω *est cohomologue à une forme minimale uniquement ergodique.*

Remarque. Bien sûr, si le groupe des périodes de ω est de rang 1, toutes les feuilles régulières sont compactes.

Théorème 2. *Pour tout entier* $n \geqq 3$, *il existe sur la variété* $\underset{4}{\#}(S^1 \times S^{n-1})$ *trois formes cohomologues* ω_1, ω_2, ω_3 *telles que:*

- ω_1 *est minimale et uniquement ergodique.*
- ω_2 *est minimale mais n'est pas uniquement ergodique.*
- *toutes les feuilles régulières de* ω_3 *sont compactes.*

L'existence de ω_2 résulte de celle d'un échange d'intervalles minimal non uniquement ergodique ([Sat], [KN], [Ke]). Grâce à ω_2 nous pourrons construire des exemples de non unique ergodicité sur des variétés plus générales. D'abord une définition.

Soit $M(\omega)$ l'union des feuilles L de ω telles que $L \cup \operatorname{Sing} \omega$ ne soit pas compact (par convention une feuille de ω est une feuille du feuilletage induit sur $M - \operatorname{Sing} \omega$). C'est un ouvert possédant un nombre fini de composantes connexes, et toute feuille de $M(\omega)$ est dense dans la composante qui la contient ([Im]; voir appendice).

Les composantes de $M(\omega)$ seront appelées *composantes minimales* de ω. Une composante minimale U est *uniquement ergodique* si le feuilletage induit sur U ne possède, à proportionnalité près, qu'une seule mesure transverse invariante.

Théorème 3. *S'il existe un homomorphisme surjectif de $\pi_1(M)$ sur $Z * Z * Z * Z$, il existe sur M une forme ω possédant une composante minimale non uniquement ergodique.*

Réciproquement:

Théorème 4. *S'il n'existe pas d'homomorphisme surjectif de $\pi_1(M)$ sur $Z * Z * Z$, toute composante minimale est uniquement ergodique. En particulier, toute forme minimale sur M est uniquement ergodique.*

Remarques.
– Dans le théorème 3 on peut probablement imposer à ω d'être minimale.
– Le second auteur pense que le théorème 3 reste vrai si on remplace $Z*Z*Z*Z$ par $Z*Z*Z$. Les phénomènes de non unique ergodicité se produiraient ainsi précisément sur les variétés M telles que $\pi_1(M)$ s'envoie surjectivement sur $Z*Z*Z$.
– Il résultera du théorème 5 que, s'il n'existe pas d'épimorphisme de $\pi_1(M)$ sur $Z * Z * Z$, alors toute forme possédant au moins 3 périodes rationnellement indépendantes contient au moins une composante minimale.

On peut maintenant se demander si la non unique ergodicité se produit «génériquement». Le théorème suivant va nous conduire dans le corollaire 7 à une réponse négative sur «la plupart» des variétés.

L'homomorphisme de $\pi_1(M)$ dans $\mathbb{R}$ obtenu par intégration d'une forme ω le long des lacets sera noté $[\omega]$; il s'identifie à la classe de cohomologie de de Rham définie par ω dans $H^1(M, \mathbb{R})$.

Théorème 5. *Supposons que l'homomorphisme $[\omega]: \pi_1(M) \to \mathbb{R}$ ne puisse pas se factoriser à travers un groupe libre. Alors ω possède au moins une composante minimale uniquement ergodique. En particulier ω possède des feuilles régulières non compactes; si ω est minimale, alors elle est uniquement ergodique.*

Remarque. Si $[\omega]$ se factorise à travers un groupe libre, on voit facilement que le groupe des périodes de ω est de rang au plus $b'_1(M)$ et que ω est cohomologue à une forme à feuilles régulières compactes (cf. 1.3).

Une forme ω (ou sa classe $[\omega]$) est *totalement irrationnelle* si son groupe des périodes est de rang maximum (égal à $b_1(M)$), ou de façon équivalente si $\operatorname{Ker}[\omega] = \operatorname{Ker} p_M$, où $p_M: \pi_1(M) \to H_1(M, Z)/\text{torsion}$ est l'homomorphisme naturel.

Corollaire 6. *Si p_M ne peut pas se factoriser à travers un groupe libre, alors toute forme totalement irrationnelle possède au moins une composante minimale uniquement ergodique.*

On peut imposer aux formes du théorème 2 d'être totalement irrationnelles (voir remarque 1.4.1 ci-dessous). Le corollaire 6 est donc faux sur $\underset{4}{\#}(S^1 \times S^{n-1})$.

L'ensemble des classes de cohomologie totalement irrationnelles forme dans $H^1(M, \mathbb{R})$ un G_δ dense de complémentaire négligeable (pour la mesure de Lebesgue). Donc:

Corollaire 7. *Si $p_M\colon \pi_1(M) \to H_1(M, Z)$/torsion ne peut pas se factoriser à travers un groupe libre, alors dans presque toute classe de cohomologie la minimalité d'une forme entraîne son unique ergodicité.*

Dans la partie 3 nous majorerons le nombre de mesures ergodiques d'une forme ω, et nous verrons (corollaire 3.2) que le corollaire 7 est vrai si $b_1(M) \leqq 2$ (même si p_M se factorise). Nous ignorons si le corollaire 7 est vrai en toute généralité. S'il l'était, cela entraînerait peut-être que dans presque toute classe de cohomologie toute composante minimale est uniquement ergodique.

Si une forme ω à singularités de Morse ne possède pas de singularités d'indice 1 ou $n-1$, on peut vérifier que ω est soit à feuilles régulières compactes soit minimale et uniquement ergodique. La raison essentielle est que ces singularités constituent la seule obstruction au prolongement en une rotation d'une application d'holonomie définie sur une courbe transverse (voir [Le3] pour plus de détails et une analyse plus poussée).

Dans le cas général où ω possède des singularités d'indice 1 ou $n-1$, l'holonomie correspond à un groupe de type fini d'*échanges d'intervalles*. Les résultats de cet article correspondent ainsi à des propriétés de ces groupes.

En particulier on peut rapprocher le corollaire 7 (et son éventuelle généralisation) de l'unique ergodicité de presque tout échange d'intervalles ([Ma], [Ve]).

Cet article se compose de 3 parties. Dans la première nous construisons des exemples, de façon à montrer les théorèmes 1 à 3. Dans la deuxième nous montrons le théorème 5. Dans la troisième nous donnons des majorations du nombre de mesures ergodiques et du nombre de composantes minimales en fonction de $b_1(M)$ et de $b'_1(M)$, et nous montrons le théorème 4. Un appendice étudie la structure de $M(\omega)$, prouvant en particulier la densité des feuilles de $M(\omega)$ dans la composante qui les contient. Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 1.

1. Construction d'exemples

1.1 Somme connexe de formes fermées

L'idée de faire la somme connexe de variétés feuilletées a déjà été utilisée dans divers contextes, principalement sur les surfaces mais aussi en dimension plus grande (par exemple par Henč et Rosenberg-Roussarie). Nous rappelons ici cette construction, adaptée au cas des formes fermées.

Soit ω une forme fermée sur une variété N^n ($n \geqq 3$) pas forcément connexe. Soient I et J deux arcs orientés disjoints, transverses à ω, tels que $\int_I \omega = \int_J \omega$

$=2T>0$. Soit $B\subset\mathbb{R}^n$ la boule de rayon $T+2\varepsilon$ centrée à l'origine (avec $\varepsilon>0$ petit), et ϕ_I un difféomorphisme de B sur un voisinage B_I de I tel que $\phi_I^{-1}(I)=\{(x_1,\ldots,x_n);\ x_1=\ldots=x_{n-1}=0;\ |x_n|\leqq T\}$ et $\phi_I^*\omega=dx_n$. Choisissons de même $\phi_J\colon B\to B_J$.

Soit $h\colon[T,T+\varepsilon]\to[0,\varepsilon]$ une fonction concave C^∞, telle que $h(r)=2(r-T)$ pour r voisin de T et $h(r)=\varepsilon$ pour r voisin de $T+\varepsilon$. On considère dans $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ l'ensemble

$$Z=\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};\ \varepsilon t^2=h(\|x\|);\ T\leqq\|x\|\leqq T+\varepsilon\}$$

(voir figure 1). C'est une hypersurface difféomorphe à $S^{n-1}\times[0,1]$, et la restriction à Z de la fonction coordonnée x_n est une fonction de Morse possédant deux points critiques, l'un d'indice 1 en $(0,\ldots,-T,0)$, l'autre d'indice $n-1$ en $(0,\ldots,T,0)$.

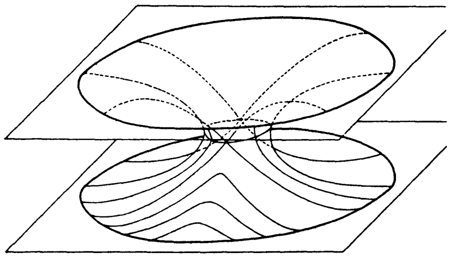

Fig. 1

Enlevons de B_I l'image par ϕ_I de la boule ouverte de rayon $T+\varepsilon$, et à la place recollons-y Z par son bord inférieur en identifiant, pour $\|x\|=T+\varepsilon$, le point $(x,-1)\in Z$ avec le point $\phi_I(x)\in B_I$. Effectuons la même opération sur B_J, en recollant cette fois le bord supérieur de Z.

Nous obtenons une variété N' munie d'une forme ω' (définie par dx_n sur Z) possédant deux singularités de plus que ω. Nous dirons que (N',ω') a été obtenu par *somme connexe le long de I et J*. On peut vérifier qu'à isotopie près (N',ω') ne dépend pas des choix faits, mais seulement de I et J.

Sur les feuilles, l'opération a eu pour effet (localement) de faire la somme connexe de la feuille passant par un point de I avec celle passant par le point correspondant de J; les feuilles passant par les extrémités de I et J ont acquis une singularité conique et ont été attachées deux à deux à la singularité.

1.2 Formes minimales uniquement ergodiques

Nous montrons ici le théorème 1: *toute forme ω possédant deux périodes rationnellement indépendantes est cohomologue à une forme minimale uniquement ergodique.* Nous commençons par le cas de la variété $N^n(p)=\#_p(S^1\times S^{n-1})$, avec bien sûr $n\geqq3$ et $p\geqq2$.

Fixons p nombres α_i $(1\leqq i\leqq p)$, avec $\alpha_1=1$ et $0<\alpha_i\leqq1$ pour $i\geqq2$. Partons de p exemplaires N_i $(1\leqq i\leqq p)$ de $S^1\times S^{n-1}$, munis de la forme non singulière $\omega_i=\alpha_i\,\mathrm{d}t$ (t est la coordonnée du facteur S^1, identifié à $\mathbb{R}/Z$). Choisissons sur N_1

des arcs orientés disjoints I_i $(1 \leqq i \leqq p)$, transverses à ω_1, à extrémités sur $\{0\} \times S^{n-1}$, et faisant deux fois le tour dans le sens positif (i.e. $\int_{I_i} \omega_1 = +2$). Choisissons sur chaque N_i $(2 \leqq i \leqq p)$ un arc orienté J_i transverse à ω_i, avec $\int_{J_i} \omega_i = +2$.

Laissons I_1 de côté, et effectuons successivement la somme connexe de ω_1 avec chaque ω_i le long de (I_i, J_i) $(2 \leqq i \leqq p)$. Nous obtenons une variété N_0 difféomorphe à $N^n(p)$, munie d'une forme ω_0 dont les périodes sur la base évidente de $H_1(N_0, Z)$ sont les α_i.

Soit maintenant ω une forme sur $N^n(p)$ possédant deux périodes indépendantes. On peut trouver une base de $H_1(N^n(p), Z)$ sur laquelle les périodes de ω soient de la forme $(t, t\alpha_2, \ldots, t\alpha_p)$, avec $t>0$, $0<\alpha_i \leqq 1$, et $\alpha_2 \notin Q$. Puisque tout automorphisme de $H_1(N^n(p), Z)$ est induit par un difféomorphisme [LP], la forme ω/t est cohomologue à une forme ω_0 obtenue comme ci-dessus, et il nous suffit de vérifier que ω_0 est minimale et uniquement ergodique dès que $\alpha_2 \notin Q$.

Considérons dans N_0 l'arc I_1 (provenant de N_1); nous l'identifions avec $[0, 2]$ par intégration de ω. Puisque toute feuille de ω_i rencontrait J_i, il rencontre toute feuille de ω_0.

La construction de ω_0 a été faite de façon que deux points de I_1 dont la différence est égale à 1 ou à α_2 soient sur la même feuille de ω_0 (nous avons besoin ici de l'hypothèse $n \geqq 3$). Puisque $\alpha_2 < 1$ et que I_1 est de longueur 2, on en déduit facilement que deux points dont la différence est une combinaison linéaire entière de 1 et α_2 sont sur la même feuille. La minimalité et l'unique ergodicité de ω_0 résultent alors des propriétés correspondantes d'une rotation irrationnelle sur le cercle.

Remarque. La forme ω_0 est en fait faiblement complète (au sens de [Le3]).

Considérons maintenant sur une variété M^n quelconque une forme ω possédant deux périodes indépendantes. En prenant un voisinage régulier d'un bouquet de cercles convenable on peut trouver une sous-variété $Y^n \subset M^n$, difféomorphe à la somme connexe de $b_1(M)$ exemplaires de $S^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$, telle que l'inclusion induise un isomorphisme entre $H^1(M, \mathbb{R})$ et $H^1(Y, \mathbb{R})$.

Mais Y peut aussi être considéré comme le complémentaire dans $N^n(b_1(M))$ d'un voisinage ouvert d'un bouquet de cercles. Il existe donc sur Y une forme uniquement ergodique à feuilles denses dans la classe de cohomologie correspondant à celle de ω.

Étendons-la en une forme de Morse ω' sur M, cohomologue à ω. Nous n'imposons à l'extension qu'une seule condition: si L est une feuille singulière avec $L \cup \operatorname{Sing} \omega'$ compact, alors $\bar{L}$ ne contient qu'une seule singularité. Les modifications ci-dessous devront toujours être faites en respectant cette condition.

La forme ω' possède une composante minimale U (contenant Y). Si $U = M - \operatorname{Sing} \omega'$, on a fini. Sinon, soit L une feuille de la frontière de U. C'est une feuille singulière, avec $L \cup \operatorname{Sing} \omega'$ compact; son adhérence contient exactement une singularité s, d'indice 1 ou $n-1$, et une seule des deux feuilles singulières issues de s est dans L.

Puisque L est disjointe de Y et que Y engendre l'homologie, $\bar{L}$ sépare M, et dans la composante A de $M-\bar{L}$ qui ne contient pas U la forme ω' est exacte. En particulier A contient au moins un centre (singularité d'indice 0 ou n).

Considérons un voisinage A' de A (voir figure 2) dont le bord se compose d'un $(n-1)$-disque D situé sur une feuille de U près de s, d'un morceau transverse à ω' et difféomorphe à $S^{n-2}\times[0,1]$, et d'un morceau de feuille L' voisin de L.

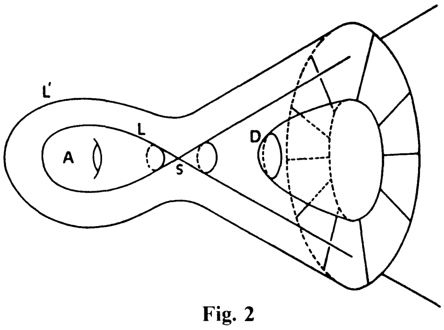

Fig. 2

Sur A' on peut écrire $\omega'=df$, et des techniques classiques ([Mi], théorème 8.1) permettent de modifier f dans l'intérieur de A' de façon à éliminer les points critiques d'indice 0 ou n (centres).

On a ainsi remplacé ω' par une forme cohomologue, possédant toujours une composante minimale uniquement ergodique contenant Y, mais avec moins de centres. En répétant l'opération si besoin est, on finit par arriver à une forme sans centre, donc minimale et uniquement ergodique. □

1.3 Formes à feuilles compactes

La construction de ω_0 donnée ci-dessus repose sur l'idée de prendre des intervalles I_i et J_i «grands» (de longueur 2 pour ω_1 ou ω_i). Si au contraire on prend ces intervalles «petits» (de longueur inférieure à min α_i), la forme obtenue par somme connexe est à feuilles régulières compactes (difféomorphes à des sphères). Nous voyons donc que, sur une somme connexe de $S^1\times S^{n-1}$, toute forme est cohomologue à une forme à feuilles régulières compactes.

Plus généralement, on peut montrer sur une variété M quelconque qu'*une forme ω est cohomologue à une forme à feuilles régulières compactes si et seulement si $[\omega]\colon \pi_1(M)\to\mathbb{R}$ se factorise à travers un groupe libre F*. La partie seulement si de cet énoncé sera montrée ci-dessous (lemme 2.2). La réciproque se démontre en réalisant l'homomorphisme $\pi_1(M)\to F$ par une application de M dans un bouquet de cercles.

1.4 Formes minimales non uniquement ergodiques

Commençons par construire sur $N^n(4)=\underset{4}{\#}(S^1\times S^{n-1})$ une forme minimale non uniquement ergodique. Compte tenu de ce qui précède, cela achèvera de montrer le théorème 2. Soit $S^1 = \mathbb{R}/Z$ un cercle. On considère deux partitions de S^1 en trois intervalles (I_1, I_2, I_3) et (J_1, J_2, J_3), comme sur la figure 3. On suppose que pour tout i les intervalles I_i et J_i sont de même longueur, et on convient qu'ils sont fermés à droite et ouverts à gauche.

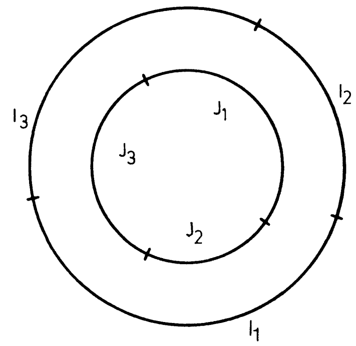

Fig. 3

Le travail de Keane [Ke] nous permet de choisir ces six intervalles de façon que l'échange d'intervalles $\psi: S^1 \to S^1$ défini en envoyant chaque I_i sur J_i par une rotation soit minimal mais pas uniquement ergodique.

Considérons maintenant $S^1 \times S^{n-1}$, et des relevés disjoints $I'_i = I_i \times \{p_i\}$ et $J'_i = J_i \times \{q_i\}$ des I_i, J_i. Munissons $S^1 \times S^{n-1}$ de la forme non singulière dt définie par le facteur S^1, et effectuons la somme connexe selon les 3 couples (I'_i, J'_i).

On obtient une forme ω sur $N^n(4)$, et sur une courbe transverse $S^1 \times \{p\}$ deux points (x, p) et (y, p) appartenant à des feuilles régulières sont sur la même feuille si et seulement si x et y sont dans la même orbite pour ψ. La forme ω est donc minimale mais n'est pas uniquement ergodique.

Remarque 1.4.1. D'après [Ke], il existe un échange d'intervalles $\bar{\psi}$ comme ci-dessus tel que la forme $\bar{\omega}$ obtenue sur $N^n(4)$ soit totalement irrationnelle. On peut donc imposer aux formes ω_i du théorème 2 d'être totalement irrationnelles.

Remarque 1.4.2. On peut suspendre $\bar{\psi}$ pour obtenir sur une surface de genre 2 une forme fermée totalement irrationnelle qui est à feuilles denses (à l'exception d'une liaison entre ses deux selles) mais n'est pas uniquement ergodique. Les théorèmes 4 et 5, ainsi que le corollaire 6, sont donc faux en dimension 2 (sauf sur T^2). Signalons d'autre part que l'unique ergodicité de presque tout échange d'intervalles ([Ma], [Ve]) n'entraîne pas que le corollaire 7 est vrai sur les surfaces de genre >1: on n'obtient l'unique ergodicité que dans presque toute classe de cohomologie relative $\Omega \in H^1(M, \operatorname{Sing}\omega; \mathbb{R})$, cf. [Le2] p. 245.

Il nous reste à construire une *composante minimale non uniquement ergodique* sur une variété M^n, à partir d'un épimorphisme $\pi: \pi_1(M) \to Z * Z * Z * Z$

(théorème 3). Soit k un entier grand ($k>2n$), et ω minimale non uniquement ergodique sur $N^k(4)$ comme ci-dessus. On peut représenter π par une application de M dans un bouquet de cercles, donc par un plongement $i: M \to N^k(4)$. Supposons i en position générale par rapport à ω, et considérons la forme induite $i^* \omega$.

Cette forme possède au moins deux mesures transverses non proportionnelles, mais a priori toutes ses feuilles régulières peuvent être compactes (en fait le lemme 2.1 dira que c'est automatiquement le cas si $i(M) \cap \mathrm{Sing}\, \omega = \emptyset$). Nous devons donc imposer des conditions supplémentaires à i.

Soit $C = S^1 \times \{p\}$ une courbe transverse à ω, sur laquelle nous relevons les I_i et J_i. Puisque ω a été obtenue par sommes connexes sur les (I_i', J_i'), nous pouvons construire pour $i = 1, 2, 3$ un rectangle $\Delta_i \subset N^k(4)$ transverse à ω, tel que le feuilletage induit sur Δ_i soit le feuilletage horizontal et que les bords verticaux de Δ_i soient les intervalles I_i et J_i de C (voir figure 4); chacun des bords horizontaux de Δ_i a un coin, correspondant à une singularité de ω. Nous pouvons supposer de plus que les Δ_i sont plongés et disjoints (en dehors de leurs bords verticaux).

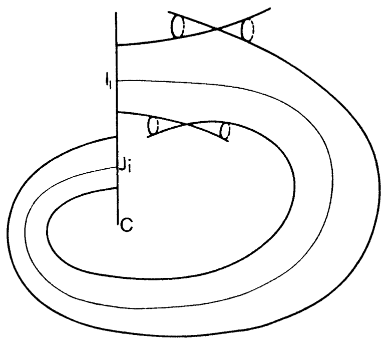

Fig. 4

Revenons maintenant au plongement $i: M \to N^k(4)$. En le modifiant près d'un bouquet de cercles, on peut lui imposer d'induire un difféomorphisme entre une surface (singulière) $\Delta' \subset M$ et l'union $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$. On sait alors que Δ' est contenue dans une composante minimale non uniquement ergodique de $i^* \omega$. $\square$

2. Existence d'une composante minimale uniquement ergodique

Nous montrons ici le théorème 5: *si* $[\omega]$ *ne se factorise pas à travers un groupe libre, alors* ω *possède une composante minimale uniquement ergodique.*

Le lemme ci-dessous sera également essentiel pour la démonstration du théorème 4 (voir partie 3):

Lemme 2.1. *Soit V^m une variété fermée plongée dans M^n, avec $m<n$. Soit ω une forme sur M telle que* $\operatorname{Sing}\omega$ *soit disjoint de V. Supposons que la forme ω' induite par ω sur V soit à singularités de Morse et possède une composante minimale W. Alors la composante minimale U de ω qui contient W est uniquement ergodique.*

Démonstration du lemme 2.1. Soit C une courbe transverse à ω' contenue dans W. Soit d'autre part X un champ de vecteurs sur $M-\operatorname{Sing}\omega$ tel que C soit une orbite de X et que $\omega(X)$ soit identiquement 1 sur $M-\operatorname{Sing}\omega$. Puisque V est compact et disjoint de $\operatorname{Sing}\omega$, il existe $\varepsilon>0$ tel que le flot $\phi_t(x)$ de X soit défini pour tout $x\in V$ et tout t avec $0\leqq t\leqq\varepsilon$.

La forme ω définit sur C une orientation et une mesure μ_ω, ce qui nous permet d'identifier C à un cercle $\mathbb{R}/aZ$ de façon que μ_ω corresponde à la mesure de Lebesgue. Soit μ une mesure transverse invariante de $\omega|U$. Nous allons montrer que, pour $0\leqq\alpha\leqq\varepsilon$, la mesure (encore notée μ) induite sur C est invariante par la rotation $R_\alpha: x\mapsto x+\alpha \bmod a$. Il en résultera que μ est proportionnelle à μ_ω, donc que $\omega|U$ est uniquement ergodique puisque C rencontre toute feuille de U.

Soient p et p' deux points de C joignables par un chemin contenu dans une feuille de ω' (donc dans V). Relevons ce chemin dans une feuille de ω par ϕ_α. L'invariance de μ par l'holonomie de ω entraîne $\mu([p,p+\alpha])=\mu([p',p'+\alpha])$, et donc $\mu([p,p'])=\mu([R_\alpha p,\ R_\alpha p'])$. Puisque toute feuille de ω' qui rencontre C contient C dans son adhérence, on en déduit l'invariance de μ par R_α. $\square$

Remarque. On peut en fait montrer un peu plus: il existe sur une courbe transverse à ω un difféomorphisme θ sans point périodique («rotation irrationnelle» pour μ_ω) tel que x et $\theta(x)$ soient toujours sur la même feuille de ω.

Lemme 2.2. *Une forme ω telle que $[\omega]:\pi_1(M)\to\mathbb{R}$ ne se factorise pas par un groupe libre possède au moins une composante minimale.*

Démonstration du lemme 2.2. Supposons que ω ne possède pas de composante minimale. Considérons sur M la relation d'équivalence que l'on engendre en identifiant deux points x et y dès que $\bar{L}_x\cap\bar{L}_y\neq\emptyset$ (L_x est la feuille de x si $x\notin\operatorname{Sing}\omega$, et $L_x=\{x\}$ si $x\in\operatorname{Sing}\omega$). Le quotient de M par cette relation est un graphe compact Γ, et $[\omega]$ se factorise par le groupe libre $\pi_1(\Gamma)$. $\square$

Nous passons maintenant à la démonstration proprement dite. Soit donc ω une forme sur M^n telle que $[\omega]$ ne se factorise pas par un groupe libre.

Supposons d'abord $n\geqq 5$. On peut alors trouver dans M une sous-variété V^{n-1} telle que l'inclusion induise un isomorphisme entre $\pi_1(V)$ et $\pi_1(M)$ (prendre pour V le bord d'un voisinage convenable du 2-squelette d'une triangulation de M).

Quitte à bouger un peu V on peut supposer que $V\cap\operatorname{Sing}\omega=\emptyset$ et que la forme induite ω' a des singularités de Morse. D'après le lemme 2.2 il existe pour ω' au moins une composante minimale W. D'après le lemme 2.1 la composante minimale de ω qui contient W est uniquement ergodique, *CQFD*.

Supposons maintenant $n=3$ ou 4. Soit $\rho: M\times S^2\to M$ la projection, et $\omega_0=\rho^*\omega$. C'est une forme fermée dont le lieu singulier est de codimension n. Puisque n est au moins égal à 3, on peut trianguler $M\times S^2$ de façon que le 2-

squelette soit disjoint de $\mathrm{Sing}\,\omega_0$, et donc construire une sous-variété $V^{n+1} \subset M \times S^2$ possédant les mêmes propriétés que ci-dessus.

Bien que les singularités de ω_0 ne soient pas de Morse, le lemme 2.1 est vrai (même démonstration mot à mot) et fournit une composante uniquement ergodique U de ω_0. La projection $\rho(U) \subset M$ est la composante cherchée pour ω. □

Remarque. Cette démonstration s'applique même si les singularités de ω ne sont pas de Morse, pourvu que $\mathrm{Sing}\,\omega$ soit de codimension au moins 3. Mais elle ne marche pas si M est une surface (voir remarque 1.4.2).

3. Le nombre de mesures ergodiques et de composantes minimales

Nous allons montrer ici le théorème 4: *si une forme ω sur M possède une composante minimale non uniquement ergodique, il existe un épimorphisme de $\pi_1(M)$ sur $Z * Z * Z$.* Mais d'abord, plaçons-nous dans un cadre plus général.

Étant donné une forme ω, soit $q(\omega)$ le nombre de ses composantes minimales, $q_{ne}(\omega)$ le nombre de ses composantes minimales non uniquement ergodiques, et $m(\omega)$ le nombre de classes de proportionnalité de mesures transverses ergodiques de $\omega \mid M(\omega)$. Sur une surface on sait [Ka] que $m(\omega) \leqq b_1(M)/2$. En dimension plus grande on a:

Proposition 3.1. *Le nombre $m(\omega)$ est fini, et $m(\omega) + q(\omega) \leqq b_1(M)$.*

Corollaire 3.2. *Si $b_1(M) = 2$, toute composante minimale est uniquement ergodique.*

Puisque $q(\omega) \leqq m(\omega)$, il vient aussi:

Corollaire 3.3. *On a $q(\omega) \leqq b_1(M)/2$. S'il y a égalité, chaque composante minimale est uniquement ergodique.*

Cette dernière inégalité est, dans un contexte un peu différent, un résultat de Plante ([Pl], prop. 8.5). On peut également majorer $m(\omega)$ et $q(\omega)$ en fonction du «premier nombre de Betti non commutatif» $b'_1(M)$ (défini dans l'introduction):

Proposition 3.4. *On a $m(\omega) + q_{ne}(\omega) \leqq b'_1(M)$.*

Corollaire 3.5. *Si une forme ω sur M possède q composantes minimales, il existe un épimorphisme de $\pi_1(M)$ sur le groupe libre à q générateurs.*

Remarque. On notera que la proposition 3.4 est fausse si M est une surface ([Sat]; le b'_1 d'une surface fermée de genre g est égal à g).

Le théorème 4 peut être considéré comme un corollaire de la proposition 3.4, mais nous en donnons une démonstration directe; nous montrerons ensuite les propositions 3.1 et 3.4. D'abord quelques préliminaires.

Soit U une union de composantes minimales de ω, et μ une mesure transverse invariante de $\omega \mid U$. On vérifie facilement que μ s'étend par la mesure nulle en une mesure transverse de ω définie sur M tout entier. Nous considérerons donc μ comme définie sur M.

A une mesure transverse μ de ω est associée une *classe de cohomologie* $[\mu]\in H^1(M, \mathbb{R})$, que nous regarderons selon les cas comme un homomorphisme de $\pi_1(M)$ ou de $H_1(M, Z)$ dans $\mathbb{R}$. Nous n'allons pas ici définir $[\mu]$ (voir par exemple [Pl], p. 345), mais seulement énoncer les propriétés dont nous aurons besoin.

Tout d'abord $[\mu_1+\mu_2]=[\mu_1]+[\mu_2]$, et $[c\mu]=c[\mu]$ pour $c>0$. Si C est une courbe transverse à ω, orientée par ω, alors $[\mu](C)$ est la masse déposée par μ sur C. Si μ est une mesure transverse de $\omega|U$, alors $[\mu](C)=0$ pour toute courbe C disjointe de U.

Il a été montré dans divers contextes que la connaissance de $[\mu]$ suffit à déterminer μ (voir [Ka], [Le1]). C'est encore vrai ici, et en fait nous aurons besoin pour les propositions 3.1 et 3.4 d'un résultat un peu plus fort:

Lemme. *Soient μ et μ' deux mesures transverses de ω, et U une composante minimale de ω. On suppose qu'il existe un nombre $b\geqq 0$ tel que $[\mu](C)-[\mu'](C)\in bZ$ pour toute courbe C contenue dans U. Alors μ et μ' coïncident sur U.*

Démonstration. Soit C une courbe transverse contenue dans U, orientée par ω. Si $b>0$, on demande que $[\mu](C)+[\mu'](C)<b$. Soit $I\subset C$ un intervalle bordé par deux points d'une même feuille L, et $\sigma\subset L$ un chemin joignant les extrémités de I. Soit C' une courbe transverse obtenue en déformant légèrement $I\cup\sigma$.

On a
$$\mu(I)-\mu'(I)=[\mu](C')-[\mu'](C')\in bZ,$$
et d'autre part
$$\mu(I)+\mu'(I)\leqq[\mu](C)+[\mu'](C)<b \qquad (\text{si } b>0).$$
Il en résulte qu'en fait $\mu(I)=\mu'(I)$. Les feuilles de U étant denses dans U, cela entraîne que μ et μ' induisent la même mesure sur C, et donc que $\mu=\mu'$ dans U. □

On déduit de ce lemme (appliqué avec $b=0$) que deux mesures qui ont la même classe de cohomologie sont égales sur $M(\omega)$. Si d'autre part $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont des mesures ergodiques de $\omega|M(\omega)$ deux à deux non proportionnelles, on sait qu'une égalité $\sum_i a_i\mu_i=\sum_i a'_i\mu_i$ (avec $a_i, a'_i\geqq 0$) n'est possible que si $a_i=a'_i$ pour tout i; il en résulte que les classes $[\mu_i]\in H^1(M, \mathbb{R})$ sont *linéairement indépendantes*. En particulier on obtient immédiatement $m(\omega)\leqq b_1(M)$.

Démonstration du théorème 4. Soit ω une forme sur M possédant une composante minimale non uniquement ergodique U. Nous pouvons supposer $n\geqq 5$ (si $n=3$ ou 4, il suffira comme dans la partie 2 de faire le produit par S^2). Considérons une sous-variété $V^{n-1}\subset M^n$, comme dans la partie 2: l'inclusion $i\colon V\to M$ induit un isomorphisme $i_*\colon\pi_1(V)\to\pi_1(M)$, la forme ω' induite sur V est à singularités de Morse, et $V\cap\operatorname{Sing}\omega=\emptyset$. D'après le lemme 2.1, toute feuille régulière contenue dans $U\cap V$ est compacte.

Considérons sur V la relation d'équivalence que l'on engendre en identifiant deux points x et y dès que $\bar{L}_x\cap\bar{L}_y\neq\emptyset$ (L_x est la feuille de ω' passant par x, ou

$\{x\}$ si $x \in \mathrm{Sing}\,\omega'$). Le quotient de V par cette relation est un graphe Γ; l'application $p: V \to \Gamma$ envoie chaque composante minimale de ω' sur un sommet, et induit un épimorphisme p_* de $\pi_1(V)$ sur le groupe libre $\pi_1(\Gamma)$.

Il nous suffit donc de vérifier que $\pi_1(\Gamma)$ est de rang au moins 3. Pour cela nous allons construire dans l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathbb{R})$ un système libre mais non générateur à deux éléments.

Soit μ une mesure transverse de $\omega | U$. Puisque dans $U \cap V$ toute feuille régulière de ω' est compacte, l'homomorphisme $[\mu]: \pi_1(M) \to \mathbb{R}$ se factorise par p_*: il existe un homomorphisme $[\mu]_\Gamma: \pi_1(\Gamma) \to \mathbb{R}$ tel que $[\mu] = [\mu]_\Gamma \circ p_* \circ i_*^{-1}$.

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures ergodiques non proportionnelles de $\omega | U$. Nous avons vu dans les préliminaires que $[\mu_1]_\Gamma$ et $[\mu_2]_\Gamma$ sont linéairement indépendants dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathbb{R})$.

Nous affirmons d'autre part que $[\mu_1]_\Gamma$ et $[\mu_2]_\Gamma$ ne peuvent pas engendrer $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathbb{R})$. S'il en était ainsi, il existerait une mesure $\mu = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2$ $(a_1, a_2 > 0)$ telle que $[\mu]_\Gamma$, et donc aussi $[\mu]$, soit d'image infinie cyclique. Cela signifierait que les feuilles régulières de $\omega | U$ sont compactes, ce qui est impossible. □

Démonstration des propositions 3.1 et 3.4. Supposons d'abord que la forme ω possède exactement une composante minimale U. Si U est uniquement ergodique, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soient $\mu_1, \ldots, \mu_k$ des mesures ergodiques deux à deux non proportionnelles de $\omega | U$. En raisonnant comme ci-dessus, on voit que les $[\mu_i]_\Gamma$ forment un système libre mais pas générateur dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathbb{R})$, donc que $k \leqq b_1'(M) - 1$, CQFD.

Traitons maintenant le cas général $q(\omega) > 1$. Appelons U_i les composantes minimales de ω, et pour chaque i choisissons des représentants μ_i^j pour les classes de proportionnalité de mesures transverses ergodiques de $\omega | U_i$. A chaque μ_i^j est associé un homomorphisme $[\mu_i^j]$ de $\pi_1(M)$ ou de $H_1(M, Z)$ dans $\mathbb{R}$.

Considérons l'homomorphisme (injectif) de $H_1(M, Z)/\mathrm{Ker}[\mu_i^1]$ dans $\mathbb{R}$ induit par $[\mu_i^1]$, et perturbons-le de façon que son image soit contenue dans Q. En composant avec la projection de $H_1(M, Z)$ sur $H_1(M, Z)/\mathrm{Ker}[\mu_i^1]$, nous voyons qu'il existe un homomorphisme $t_i: H_1(M, Z) \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes: l'image de t_i est contenue dans Q (donc de la forme $q_i Z$, $q_i \in Q$), t_i s'annule sur toute courbe contenue dans un U_k $(k \neq i)$, et il existe une courbe orientée $C_i \subset U_i$ avec $t_i(C_i) \neq 0$. En vue de la proposition 3.4, notons de plus que, si $[\mu_i^1]: \pi_1(M) \to \mathbb{R}$ se factorise par un épimorphisme π de $\pi_1(M)$ sur un groupe libre F, on peut demander qu'il en soit de même pour t_i.

Il nous suffit pour montrer la proposition 3.1 de voir que, si les t_i possèdent les propriétés ci-dessus, alors *la famille formée des* $[\mu_i^j]$ *et des* t_i *est libre dans* $H^1(M, \mathbb{R})$. Soient a_i^j et b_i des réels tels que

$$\sum_{i,j} a_i^j [\mu_i^j](\alpha) + \sum_i b_i t_i(\alpha) = 0$$

pour tout $\alpha \in H_1(M, Z)$. Nous voulons prouver que ces réels sont tous nuls.

Soit C une courbe orientée contenue dans un U_i. On a

$$\sum_j a_i^j [\mu_i^j](C) + b_i t_i(C) = 0,$$

et donc $\sum_j a_i^j[\mu_i^j](C) \in b_i q_i Z$. Définissons $\mu_i^+ = \sum_j a_i^j \mu_i^j$, la sommation n'étant prise que sur les j tels que $a_i^j > 0$, et de même μ_i^-. Alors

$$[\mu_i^+](C) - [\mu_i^-](C) \in b_i q_i Z$$

pour toute courbe $C \subset U_i$, et donc d'après le lemme $\mu_i^+ = \mu_i^-$. Les μ_i^j étant étrangères les unes aux autres, ce n'est possible que si les a_i^j sont nuls pour tout j.

Les a_i^j sont donc tous nuls, et il vient $\sum_i b_i t_i = 0$. Puisque $t_i(C_k) \neq 0 \Leftrightarrow k = i$, les b_i sont également nuls. La proposition 3.1 est donc prouvée. □

Passons maintenant à la proposition 3.4. Soit $i\colon V^{n-1} \to M^n$ comme dans la démonstration du théorème 4 (ici encore, nous supposons $n \geqq 5$). Nous commençons par construire à partir de ω une forme auxiliaire ω_c telle que $i^* \omega_c$ soit à feuilles régulières compactes.

Supposons donc qu'un $U_i \cap V$ contienne une composante minimale W_i de $i^* \omega$ (d'après le lemme 2.1, ce n'est possible que si U_i est uniquement ergodique), et fixons une courbe transverse $C_i \subset W_i$. On vérifie facilement qu'il est possible de modifier ω en une forme de Morse transverse à C_i, égale à ω en dehors d'un compact $K_i \subset U_i$, induisant une forme de Morse sur V, et dont toutes les périodes dans U_i sont *rationnelles*. En effectuant cette opération dans chacun des U_i pour lesquels $U_i \cap V$ contient une composante minimale, nous obtenons la forme ω_c cherchée.

A $i^* \omega_c$ est associée une projection de V sur un graphe Γ, qui induit un épimorphisme π de $\pi_1(V)$ (ou $\pi_1(M)$) sur le groupe libre $\pi_1(\Gamma)$ (voir démonstration du théorème 4). Nous allons maintenant terminer en construisant $m(\omega) + q_{ne}(\omega)$ homomorphismes indépendants de $\pi_1(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}$.

Si U_i n'est pas uniquement ergodique (pour ω, bien sûr), alors $U_i \cap V$ est à feuilles régulières compactes, et les homomorphismes $[\mu_i^j]\colon \pi_1(M) \to \mathbb{R}$ se factorisent par π. Nous obtenons ainsi $m(\omega) - (q(\omega) - q_{ne}(\omega))$ homomorphismes indépendants de $\pi_1(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}$.

Supposons que nous puissions construire pour tout i des homomorphismes $t_i\colon \pi_1(M) \to \mathbb{R}$, se factorisant par π, et possédant les propriétés requises plus haut: $t_i(\pi_1(M)) \subset Q$; $t_i = 0$ sur toute courbe contenue dans U_k $(k \neq i)$; $\exists\, C_i \subset U_i$ avec $t_i(C_i) \neq 0$. Nous aurons alors fini: nous savons en effet que la famille formée des $[\mu_i^j]$ et des t_i est libre dans $H^1(M, \mathbb{R})$.

Nous avons déjà remarqué qu'il existe de tels t_i si $U_i \cap V$ est à feuilles régulières compactes. Sinon, soit $L_i \subset U_i$ une feuille régulière de ω_c rencontrant C_i. Elle est compacte, et après avoir orienté L_i et M nous définissons $t_i\colon H_1(M, Z) \to Z$ en comptant l'intersection algébrique avec L_i. Cet homomorphisme possède les propriétés requises et, considéré comme homomorphisme de $\pi_1(M)$ dans $\mathbb{R}$, se factorise par π. □

Appendice. Une forme fermée de Morse n'a pas de feuille exceptionnelle

Rappelons que nous avons défini $M(\omega)$ comme l'union des feuilles L telles que $L \cup \mathrm{Sing}\, \omega$ ne soit pas compact. On remarque que, si L est une feuille compacte (régulière), alors les feuilles voisines de L sont également compactes (le feuilletage est sans holonomie). On en déduit facilement que $M(\omega)$ est ouvert et possède un nombre fini de composantes connexes; ce nombre peut d'ailleurs être majoré en fonction de $\pi_1(M)$, voir partie 3.

Nous voulons ici montrer que, *si U est une composante de $M(\omega)$, alors toute feuille de U est dense dans U*. Notre démonstration a été inspirée par la lecture de [Sac], et simplifiée grâce à l'aide de Gaël Meigniez; elle est plus courte mais moins générale que celle de [Im]. On trouvera dans [FLP] (exposé 9) une démonstration pour le cas des surfaces, basée sur le théorème de récurrence de Poincaré.

Soit X un champ de vecteurs sur $M^* = M - \operatorname{Sing}\omega$ tel que $\omega(X)$ soit identiquement 1, et que près de chaque singularité le champ soit proportionnel à un champ à singularité hyperbolique. Nous notons $\phi_t(x)$ le flot (partiellement) défini par X sur la variété ouverte M^*. Puisque $\omega(X)\equiv 1$, il préserve ω.

Soit L une feuille contenue dans U. La forme du champ près des singularités nous permet de choisir $\varepsilon>0$ avec la propriété suivante: pour tout $p\in\bar{L}-\operatorname{Sing}\omega$ tel que $\phi_\varepsilon(p)$ ne soit pas défini, il existe un $t\in(0,\varepsilon)$ pour lequel $\phi_t(p)$ est défini et appartient à $\bar{L}$.

Supposons maintenant que $I=[x,\phi_b(x)]$ soit un morceau d'orbite de X, avec $0<b<\varepsilon$ et $I\cap\bar{L}=\delta I$. Nous affirmons que la feuille $L_x\subset\bar{L}$ passant par x est *fermée* dans M^* (i.e. $L_x\cup\operatorname{Sing}\omega$ est compact). Sinon, il existe $y\in L_x$ et $c\in(0,b)$ avec $\phi_c(y)\in L_x$. Sur un chemin plongé σ joignant x à y dans L_x, l'ensemble des points où ϕ_c n'est pas défini est un fermé qui ne contient pas x mais qui n'est pas vide (car $\phi_c(x)\notin L_x$). En considérant dans cet ensemble le point le plus proche de x, on contredit le choix de ε.

Puisque L est dans U, donc n'est pas fermée dans M^*, il existe $x_0\in L$ et $\tau\in(0,\varepsilon)$ avec $\phi_\tau(x_0)\in L$. S'il existe des $t>0$ arbitrairement petits tels que $\phi_t(x_0)\notin\bar{L}$, alors d'après ce qui précède L est une limite de feuilles fermées dans M^*, ce qui contredit $L\subset M(\omega)$. Nous voyons donc que toute feuille $L\subset U$ est localement dense. On en déduit facilement que les feuilles de U sont en fait denses dans U. $\square$

Remerciements. L'étude de l'ergodicité des 1-formes fermées singulières a été abordée pour la première fois par Damir Henč. Celui-ci a montré dans [He] que, si ω est cohomologue à une forme minimale non singulière, alors ω possède exactement une composante minimale, et cette composante est uniquement ergodique. Le premier auteur a bénéficié de nombreuses discussions avec Damir Henč pendant son séjour en France en 1982. Le présent article est né des réflexions suscitées par la lecture de [He] et de preprints ultérieurs, ainsi que par de longues discussions entre les deux auteurs et Damir Henč en octobre 1983. Nous sommes heureux de pouvoir exprimer ici notre reconnaissance.

Références

[BL] Blank, S., Laudenbach, F.: Isotopie de formes fermées en dimension trois. Invent. Math. **54**, 103–177 (1979)

[FLP] Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V.: Travaux de Thurston sur les surfaces. Astérisque **66–67** (1979), SMF Paris

[He] Henč, D.: Ergodicity of foliations with singularities. Preprint IHES (1982)

[Im] Imanishi, H.: On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities. J. Math. Kyoto Univ. **19**, 285–291 (1979)
[Ka] Katok, A.: Invariant measures for flows on oriented surfaces. Sov. Math., Dokl. **14**, 1104–1108 (1973)
[Ke] Keane, M.: Non-ergodic interval exchange transformations. Isr. J. Math. **26**, 188–196 (1977)
[KN] Keynes, H., Newton, D.: A minimal non-uniquely ergodic interval exchange transformation. Math. Z. **148**, 101–105 (1976)
[La] Laudenbach, F.: Submersions sur le cercle. Bull. S.M.F. **104**, 417–431 (1976)
[Le1] Levitt, G.: Sur les mesures transverses invariantes d'un feuilletage de codimension 1. C.R. Acad. Sc. Paris **290**, 1139–1140 (1980)
[Le2] Levitt, G.: Flots topologiquement transitifs sur les surfaces compactes sans bords: Contre-exemples à une conjecture de Katok. Ergodic Theory Dyn. Syst. **3**, 241–249 (1983)
[Le3] Levitt, G.: Propriétés topologiques des 1-formes fermées singulières (Preprint)
[LP] Laudenbach, F., Poenaru, V.: A note on 4-dimensional handlebodies. Bull. S.M.F. **100**, 337–344 (1972)
[Ma] Masur, H.: Interval exchange transformations and measured foliations. Ann. Math. **115**, 169–200 (1982)
[Mi] Milnor, J.: Lectures on the *h*-cobordism theorem. Princeton Math. Notes, 1965
[Pl] Plante, J.F.: Foliations with measure-preserving holonomy. Ann. Math. **102**, 327–361 (1975)
[QR] Que, N., Roussarie, R.: Sur l'isotopie des formes fermées en dimension 3. Invent. Math. **64**, 69–87 (1981)
[Sac] Sacksteder, R.: Foliations and pseudogroups. Am. J. Math. **87**, 79–102 (1965)
[Sat] Sataev, E.: On the number of invariant measures for flows on orientable surfaces. Math. USSR Izv. **9**, 813–830 (1975)
[Si] Sikorav, J.C.: Formes différentielles fermées non singulières sur le *n*-tore. Comment. Math. Helv. **57**, 79–106 (1982)
[Ti] Tischler, D.: On fibering certain foliated manifolds over S^1. Topology **9**, 153–154 (1970)
[Ve] Veech, W.: Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. Ann. Math. **115**, 201–242 (1982)

Oblatum 16-I-1985