

1-formes fermées singulières et groupe  
fondamental.

Levitt, G.

pp. 635 - 667



---

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes.

Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

### Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

## 1-formes fermées singulières et groupe fondamental

Gilbert Levitt

Département de Mathématiques, Université Paris Sud, F-91405 Orsay Cedex, France

**Summary.** We study the influence of the  $\pi_1$  of a closed manifold  $M^n$  ( $n \geq 3$ ) on the foliations of  $M$  defined by closed differential 1-forms with Morse singularities (of index  $\neq 0, n$ ). Every nonexact form is cohomologous to a weakly complete one, that is one whose leaf space is of the same type as that of a nonsingular form. Generically, a form has compact leaves or is weakly complete. If  $\pi_1 M$  has no quotient isomorphic to  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , then every nonexact form on  $M$  is weakly complete. We also say a form  $\omega$  is complete if every path in  $M$  is homotopic to either a path transverse to  $\omega$  or a path contained in a leaf of  $\omega$ . Completeness of  $\omega$  depends only on its de Rham cohomology class. The set of complete cohomology classes depends only on  $\pi_1 M$  and is related to finitely generated normal subgroups of  $\pi_1 M$  with quotient  $\simeq \mathbb{Z}$ . If  $\pi_1 M$  is nilpotent (or even polycyclic), every nonexact form on  $M$  is complete. On irreducible 3-manifolds, a form is complete iff it is cohomologous to a nonsingular one.

### Introduction

Cet article est consacré aux 1-formes différentielles fermées singulières sur les variétés fermées de dimension  $n \geq 3$  (on notera que seules les variétés fibrées sur le cercle possèdent des 1-formes fermées non singulières [Ti]). Nous étudions principalement les trois questions suivantes:

1. Certains résultats sur les feuilletages définis par les 1-formes fermées non singulières s'étendent-ils aux formes singulières (en général, ou sur certaines variétés)?

2. Pour les formes non singulières, la classe de cohomologie de De Rham constitue un invariant très fort. En est-il de même pour les formes singulières? Des formes cohomologues ont-elles des propriétés topologiques en commun?

3. Si  $M^3$  est une variété fermée irréductible de dimension 3, la norme sur l'homologie définie par Thurston [Th1] et le théorème de fibration de Stallings [St] décrivent le cône ouvert  $\mathcal{C}(M) \subset H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  des classes de cohomologie représentables par une 1-forme fermée non singulière, et le relie à  $\pi_1 M$ . Cette théorie a-t-elle un équivalent en dimension plus grande?

Nous avons remarqué dans [AL] que, contrairement à ce qui se passe pour les formes non singulières, deux formes singulières cohomologues peuvent être très dissemblables; ainsi l'une peut être à feuilles régulières compactes alors que l'autre est à feuilles denses.

Toutefois nous allons voir que, sur certaines variétés et dans certaines classes de cohomologie, les formes se ressemblent beaucoup. Pour cela nous introduirons deux propriétés, la complétude et la faible complétude, que possèdent toutes les formes non singulières et certaines formes singulières (que, le plus souvent, nous supposons à singularités de Morse, d'indice différent de 0 ou  $n$ ).

Les formes *faiblement complètes*, sur une variété fermée  $M$ , seront essentiellement celles qui ont le même espace des feuilles qu'une forme non singulière.

Nous montrerons d'abord que toute classe de cohomologie de De Rham  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  contient une forme faiblement complète; en d'autres termes, toute forme non exacte est cohomologue à une forme faiblement complète.

En étudiant les perturbations d'une forme  $\omega$  de Morse et minimale (c'est à dire à feuilles denses, ou de façon équivalente sans feuille  $L$  avec  $L \cup \text{Sing } \omega$  compact), nous verrons que, si  $\omega$  est minimale et si l'homomorphisme d'intégration  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  ne peut pas se factoriser par un groupe libre, alors  $\omega$  est faiblement complète.

Nous montrerons aussi que, génériquement, une forme est faiblement complète ou possède des feuilles compactes.

Nous déterminerons également les classes de cohomologie  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  dans lesquelles toutes les formes sont faiblement complètes: ce sont exactement celles pour lesquelles l'homomorphisme de  $\pi_1 M$  dans  $\mathbb{R}$ , obtenu en intégrant les formes de  $\Omega$ , ne peut pas se factoriser de façon non triviale par un produit libre  $\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$  ( $a, b \geq 1$ ).

En particulier, s'il n'existe pas d'homomorphisme surjectif de  $\pi_1 M$  sur  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , alors toute forme sur  $M$  est faiblement complète.

Sous une hypothèse plus forte sur  $\pi_1 M$  (par exemple  $\pi_1 M$  est nilpotent), nous montrerons que les formes fermées sur  $M$  sont en fait complètes.

Les formes complètes peuvent être définies de plusieurs façons équivalentes. En voici une:  $\omega$  est complète si et seulement si tout chemin est homotope (à extrémités fixes) à un chemin contenu dans une feuille ou à un chemin transverse à  $\omega$ .

Nous verrons que le fait pour une forme d'être ou non complète ne dépend que de sa classe de cohomologie. Ceci nous permettra de définir le cône  $U(M) \subset H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  des classes de cohomologie complètes.

Nous montrerons que  $U(M)$  est ouvert, ne dépend que de  $\pi_1 M$ , et que ses points à coordonnées entières correspondent aux homomorphismes non triviaux de  $\pi_1 M$  dans  $\mathbb{Z}$  dont le noyau est de type fini. Nous verrons également que  $U(M)$ , qui contient toujours  $\mathcal{C}(M)$ , lui est égal si  $M$  est une 3-variété irréductible.

Ces résultats nous font penser que  $U(M)$ , plus maniable et moins souvent vide que  $\mathcal{C}(M)$ , est un objet intéressant à étudier sur les variétés de dimension  $> 3$  (et sur certaines 3-variétés si la conjecture de Poincaré est fausse ...). On peut en fait en donner des définitions algébriques en fonction de  $\pi_1 M$  (cf. partie V).

### Énoncé des résultats

Commençons par rappeler quelques propriétés bien connues des 1-formes fermées non singulières sur les variétés fermées. Le lecteur peu familier avec les 1-formes fermées trouvera quelques généralités dans les préliminaires (sections I.1 à I.3).

Si le groupe des périodes  $P(\omega) \subset \mathbb{R}$  de la forme non singulière  $\omega$  est cyclique, toutes les feuilles du feuilletage défini par  $\omega$  sont compactes (et sont les fibres d'une fibration sur  $S^1$ ). Si au contraire  $\omega$  possède deux périodes rationnellement indépendantes, toutes les feuilles sont denses; nous dirons que  $\omega$  est *minimale*.

Deux formes cohomologues et proches sont isotopes [Mo], et en dimension  $\leq 3$  la classe de cohomologie détermine en fait la forme à isotopie près ([BL], [QR]). Notons enfin une propriété importante des formes non singulières: tout chemin sur lequel l'intégrale de  $\omega$  est nulle est homotope à un chemin contenu dans une feuille.

Considérons maintenant des formes singulières. Nous travaillerons toujours sur une *variété fermée orientable*  $M^n$  ( $n \geq 3$ ), et nous étudierons des formes  $\omega$  à *singularités de Morse, sans centre* (i.e. tout point de  $M$  a un voisinage sur lequel  $\omega$  est la différentielle d'une fonction de Morse sans point critique d'indice 0 ou  $n$ ; noter qu'une telle forme ne peut pas être exacte).

Les résultats se généralisent en fait aux formes de Morse avec centres, et même aux formes dont le lieu singulier est quelconque mais de codimension  $\geq 3$  (voir partie VI).

Une forme de Morse sans centre  $\omega$  est *faiblement complète* si, dès que deux points de  $M - \text{Sing } \omega$  peuvent être joints par un chemin sur lequel l'intégrale de  $\omega$  est nulle, alors ils appartiennent à la même feuille; cela revient à dire que l'espace des feuilles du feuilletage est du même type que si  $\omega$  était non singulière: les feuilles sont les images réciproques des points par l'application  $\psi: M - \text{Sing } \omega \rightarrow \mathbb{R}/P(\omega)$  définie par

$$\psi(x) = \int_{x_0}^x \omega \quad (x_0 \text{ étant un point base}).$$

Les formes faiblement complètes sont également celles pour lesquelles, pour toute singularité  $s$  d'indice 1 ou  $n-1$ , les deux bouts singuliers issus de  $s$  sont contenus dans la même feuille (voir figure 1).

Soit  $\omega$  une forme faiblement complète. Si  $P(\omega)$  est cyclique, toutes les feuilles régulières de  $\omega$  sont compactes (et homologues entre elles); si par contre  $P(\omega)$  est de rang  $\geq 2$ , alors le feuilletage est minimal (et uniquement ergodique).

Nous commencerons par montrer (grâce à une construction de Arnoux-Levitt [AL]):

**Théorème 1.** *Toute classe de cohomologie  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  est représentable par une forme faiblement complète.*

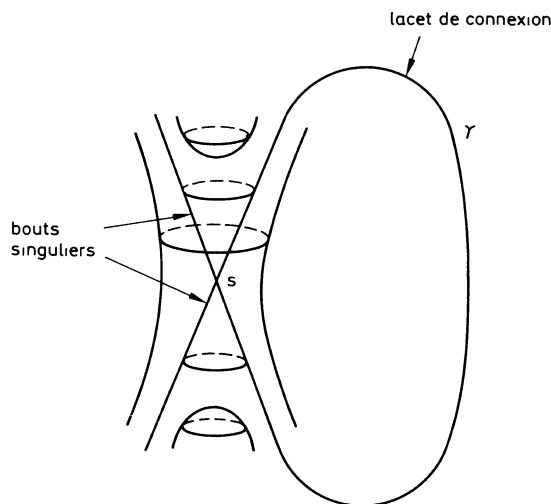


Fig. 1

**Corollaire.** *Tout homomorphisme surjectif de  $\pi_1 M$  dans  $\mathbb{Z}$  peut se représenter par une application  $p$  de  $M$  dans un cercle, à singularités de Morse, et à images réciproques  $p^{-1}(c)$  connexes.*

Nous caractériserons les classes de cohomologie dans lesquelles toutes les formes de Morse sans centre sont faiblement complètes. Soit  $\omega$  une forme de Morse sans centre, et  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  l'homomorphisme obtenu par intégration de  $\omega$  sur les lacets. Nous avons la dichotomie suivante:

**Théorème 2.** *Si  $[\omega]$  ne peut pas se factoriser par un épimorphisme  $\alpha: \pi_1 M \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$  ( $a, b \geq 1$ ), alors  $\omega$  (et toute forme cohomologue à  $\omega$ ) est faiblement complète.*

*Si au contraire il y a factorisation par un  $\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$ , alors  $\omega$  est cohomologue à une forme (de Morse sans centre) non faiblement complète (possédant même une feuille compacte qui sépare  $M$ ).*

En particulier:

**Corollaire.** *S'il n'existe pas d'épimorphisme de  $\pi_1 M$  sur  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , toute forme sur  $M$  est faiblement complète, et réciproquement.*

Dans la partie VI nous déduirons du théorème 2 un résultat sur les formes dont les singularités ne sont pas de Morse:

**Corollaire.** *S'il n'existe pas d'épimorphisme de  $\pi_1 M$  sur  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , une forme sur  $M$  dont le lieu singulier est de codimension  $\geq 3$  ne possède pas de feuille exceptionnelle.*

Revenons aux formes de Morse sans centre. Avec une hypothèse sur  $[\omega]$  plus faible que dans le théorème 2, nous obtenons la faible complétude pour les formes minimales (améliorant le théorème 5 de [AL]):

**Théorème 3.** *Si  $\omega$  est minimale et si  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  ne peut pas se factoriser par un groupe libre, alors  $\omega$  est faiblement complète.*

Rappelons qu'une forme de Morse est minimale ssi il n'existe pas de feuille  $L$  avec  $L \cup \text{Sing } \omega$  compact (cf. I.3).

Les théorèmes 2 et 3 permettent, sous certaines hypothèses de non-factorisation de l'homomorphisme naturel  $p_M: \pi_1 M \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})/\text{torsion}$ , de prouver la faible complétude des formes (resp. des formes minimales) dans presque toute classe de cohomologie (voir partie III).

Les théorèmes 2 et 3 se déduisent de l'étude des formes  $\omega'$  cohomologues à  $\omega$  et proches de  $\omega$  (dans la topologie  $C^\infty$ ). En fait:

**Théorème 4.** 1) *Si  $\omega$  n'est pas faiblement complète, elle est approchable par des formes cohomologues possédant des feuilles compactes.*

2) *Si  $\omega$  est minimale mais pas faiblement complète, elle est approchable par des formes cohomologues dont toutes les feuilles régulières sont compactes, et aussi par des formes cohomologues faiblement complètes.*

3) *Si  $\omega$  est faiblement complète, il en est de même des formes cohomologues à  $\omega$  et proches de  $\omega$ .*

Soit  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$ , et soit  $F(\Omega)$  l'espace de toutes les 1-formes fermées représentant  $\Omega$ , muni de la topologie  $C^\infty$ . On déduit du théorème 4 (assertion 1):

**Corollaire.** *Les formes de Morse qui possèdent des feuilles compactes, ou qui n'ont pas de centre et sont faiblement complètes, forment un ouvert dense dans  $F(\Omega)$ .*

Passons maintenant aux *formes complètes*. On peut les définir de plusieurs façons équivalentes (voir propositions II.2 et IV.6). Par exemple: tout chemin d'intégrale nulle est homotope à un chemin contenu dans une feuille; pour toute feuille  $L$ , la suite  $\pi_1 L \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{[\omega]} \mathbb{R}$  est exacte; pour toute singularité  $s$  d'indice 1 ou  $n-1$ , on peut joindre les deux bouts singuliers issus de  $s$  par un lacet de connexion  $\gamma$  (voir figure 1) homotope à 0 dans  $M$ .

Le fait qu'une forme soit complète ou non ne dépend que de sa classe de cohomologie:

**Théorème 5.** *Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux formes cohomologues. Alors  $\omega'$  est complète si et seulement si  $\omega$  l'est.*

*Si  $\pi_1 M$  est abélien, ou nilpotent, ou plus généralement si son sous-groupe des commutateurs est de type fini, toute forme sur  $M$  est complète.* Cela se déduit du résultat suivant:

**Théorème 6.** *Si le noyau de  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  est de type fini, alors  $\omega$  est complète. La réciproque est vraie si  $P(\omega)$  est cyclique.*

En général, soit  $U(M) \subset H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  l'ensemble des classes de cohomologie complètes (c'est-à-dire représentées par des formes complètes).

**Théorème 7.** a) *Le cône  $U(M) \subset H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  est ouvert.*

b)  *$U(M)$  ne dépend que de  $\pi_1 M$ : si  $\rho: \pi_1 M \rightarrow \pi_1 M'$  est un isomorphisme, alors  $\rho^*: H^1(M', \mathbb{R}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})$  envoie  $U(M')$  sur  $U(M)$ .*

Si  $\omega$  est à périodes rationnelles, alors d'après le théorème 6 elle est complète si et seulement si  $\text{Ker}[\omega]$  est de type fini. L'assertion a du théorème 7 a donc une conséquence algébrique (déjà connue):

**Corollaire** [Ne]. *Soit  $G$  un groupe de présentation finie. Dans  $\text{Hom}(G, \mathbb{Q}) - \{0\}$ , l'ensemble des homomorphismes dont le noyau est de type fini forme un ouvert.*

Nous verrons que, si  $M$  est une 3-variété irréductible, une forme est complète si et seulement si elle est cohomologue à une forme non singulière; en d'autres termes,  $U(M) = \mathcal{C}(M)$ . Dans ce cas  $U(M)$  est donc de type polyédral [Th1].

Ceci contraste fortement avec des exemples [BNS] où  $U(M) \cup \{0\}$  contient  $H^1(M, \mathbb{Q})$  sans être égal à  $H^1(M, \mathbb{R})$  (nous donnerons à la fin de la partie V la relation entre  $U(M)$  et l'invariant  $\Sigma$  défini algébriquement dans [BNS] à partir du groupe  $G = \pi_1(M)$ ). En particulier, il existe des variétés sur lesquelles toutes les classes de cohomologie de rang 1 sont complètes sans que toutes les classes de rang  $\geq 2$  le soient.

*Remerciements.* Le point de départ de cette recherche a été un article [Hen] dans lequel Damir Henč montre qu'une forme de Morse  $\omega_0$  sans feuille compacte, cohomologue à une forme  $\omega_1$  minimale non singulière, est minimale et uniquement ergodique. Après avoir étudié cet article avec Pierre Arnoux, je me suis aperçu que la démonstration de Henč donnait plus que l'unique ergodicité de  $\omega_0$ ; elle donne en fait la complétude, et marche également si  $\omega_1$  est une forme de Morse sans singularité d'indice 1 ou  $n-1$ . Ceci, ainsi qu'un autre texte de Henč et des conversations avec lui, m'a conduit à étudier les formes complètes et à montrer que la complétude d'une forme ne dépend que de sa classe de cohomologie. Henč a ainsi été une grande source d'inspiration, et je l'en remercie.

Le présent article s'est développé en même temps que celui avec Arnoux sur l'unique ergodicité [AL]. D'ailleurs la démonstration du théorème III.1 est essentiellement une construction de [AL], et ma première démonstration du théorème III.4 reprenait dans un contexte différent l'idée d'induire la forme sur une sous-variété. Pierre Arnoux a été pour moi un interlocuteur patient et attentif, qui m'a beaucoup aidé à développer mes idées. Je lui suis très reconnaissant pour toutes les conversations que nous avons eues.

## Plan de l'article

|   |      |
|---|------|
| I. Préliminaires  | .640 |
| II. Définition des formes faiblement complètes et complètes | .644 |
| III. Formes et classes de cohomologie faiblement complètes  | .647 |
| IV. Structure transverse et $\pi_1$ des feuilles            | .655 |
| V. Classes de cohomologie complètes                         | .658 |
| VI. Généralisation  | .663 |

Certains résultats de cet article ont été annoncés dans [Le]. Les parties IV et V sont pratiquement indépendantes de la partie III. Les théorèmes 1 à 4 sont montrés dans la partie III, les théorèmes 5 à 7 dans la partie V.

## I. Préliminaires

Soit  $\omega$  une 1-forme fermée sur une variété compacte sans bord  $M^n$  de dimension  $n \geq 3$ .

I.1. L'homomorphisme de  $\pi_1 M$  dans  $\mathbb{R}$  obtenu en intégrant  $\omega$  le long des lacets sera noté  $[\omega]$ . Deux formes définissent le même homomorphisme si et seulement si leur différence est exacte, et nous identifierons l'homomorphisme  $[\omega]$  à la classe de cohomologie de De Rham  $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ . D'autre part nous confondons souvent un lacet et l'élément qu'il détermine dans  $\pi_1 M$ .

L'image de  $[\omega]$  est le groupe des périodes  $P(\omega) \subset \mathbb{R}$ . Ce groupe est de type fini, donc isomorphe à un  $\mathbb{Z}^{r(\omega)}$ ;  $r(\omega)$  s'appelle le rang de  $\omega$  (ou de sa classe  $[\omega]$ ). Le rang est nul pour les formes exactes, égal à 1 si  $P(\omega)$  est infini cyclique, et  $\geq 2$  dès que  $\omega$  possède deux périodes rationnellement indépendantes ( $P(\omega)$  est alors dense dans  $\mathbb{R}$ ).

Une forme  $\omega$  (ou sa classe de cohomologie) est *totalelement irrationnelle* si son rang est maximal, c'est à dire égal au premier nombre de Betti  $b_1 M$ . Une autre caractérisation est que le noyau de  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  est égal au noyau de l'homomorphisme naturel  $p_M: \pi_1 M \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})/\text{torsion}$  (bien sûr on a toujours  $\text{Ker}[\omega] \supset \text{Ker} p_M$ ). Dans  $H^1(M, \mathbb{R})$  l'ensemble des classes totalelement irrationnelles est un  $G_\delta$  dense de complémentaire négligeable (pour la mesure de Lebesgue).

I.2. Une primitive locale de  $\omega$  est une fonction  $f$  à valeurs réelles, définie sur un ouvert de  $M$  et vérifiant  $df = \omega$ . Sur tout ouvert simplement connexe  $\omega$  admet une primitive locale, unique à une constante additive près.

Les singularités de  $\omega$  sont les points  $x$  où  $\omega_x = 0$ ; ils correspondent aux points critiques des primitives locales. L'ensemble des singularités de  $\omega$  est noté  $\text{Sing } \omega$ , et son complémentaire  $M^*$ .

Une forme  $\omega$  est de Morse si tout point singulier  $x$  de  $\omega$  est un point critique non dégénéré pour les primitives locales de  $\omega$ . Les singularités d'une forme de Morse sont en nombre fini et ont un indice compris entre 0 et  $n$ . Une singularité d'indice 0 ou  $n$  est un centre; une singularité d'indice 1 ou  $n-1$  sera dite conique (voir I.4). On notera qu'une forme de Morse sans centre ne peut pas être exacte.

I.3. Sur  $M^* = M - \text{Sing } \omega$  la forme  $\omega$  est non singulière et définit un feuilletage de codimension 1, donné par les niveaux des primitives locales de  $\omega$ .

La forme  $\omega$  détermine une mesure transverse invariante du feuilletage, obtenue en associant à un intervalle (ou à une courbe fermée) transverse  $I$  sa longueur  $|I| = \int_I \omega$ . Le nombre  $|I|$  sera parfois appelé distance entre les extrémités de  $I$ .

Le feuilletage possède également une orientation transverse, donnée par le sens de croissance des primitives locales. En particulier toute feuille compacte est transversalement orientée.

Une feuille de  $\omega$  sera par définition une feuille du feuilletage ci-dessus. L'espace des feuilles  $M^*/\omega$  de  $\omega$  est le quotient de  $M^*$  par la relation d'équivalence «être sur la même feuille».

Si  $r(\omega) \leq 1$ , on montre que toute feuille  $L$  de  $\omega$  est fermée dans  $M^*$ , ou de façon équivalente que  $L \cup \text{Sing } \omega$  est compact (si  $\omega$  est de Morse, toutes les feuilles sauf un nombre fini sont compactes).

En général, nous notons  $N(\omega)$  l'union des feuilles  $L$  telles que  $L \cup \text{Sing } \omega$  ne soit pas compact. Si  $\omega$  est de Morse, c'est un ouvert possédant un nombre fini



de composantes, dites *composantes minimales* car toute feuille de  $N(\omega)$  est dense dans la composante qui la contient ([Im 1]; voir appendice de [AL]).

Soit  $\omega$  une forme de Morse sans centre, et  $x_0$  un point base. On peut associer à tout  $x \in M^*$  un élément bien défini  $\psi(x) = \int_{x_0}^x \omega$  dans  $\mathbb{R}/P(\omega)$ . On obtient ainsi une surjection  $\psi: M^* \rightarrow \mathbb{R}/P(\omega)$ , qui se factorise par l'espace des feuilles  $M^*/\omega$ . Les formes faiblement complètes seront celles pour lesquelles  $\psi$  induit une bijection entre  $M^*/\omega$  et  $\mathbb{R}/P(\omega)$ .

I.4. Soit  $\omega$  une forme de Morse. Si  $s$  est une singularité d'indice compris entre 2 et  $n-2$ , il existe des voisinages arbitrairement petits  $U$  de  $s$  tels que tous les niveaux  $f^{-1}(c)$  des primitives locales  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  soient *connexes*. La singularité  $s$  n'affecte donc pas la structure transverse du feuilletage défini par  $\omega$ , et nous verrons que les formes n'ayant que des singularités d'indice compris entre 2 et  $n-2$  se comportent dans une large mesure comme des formes non singulières.

Au contraire, comme l'avait remarqué Henč, les singularités d'indice 1 ou  $n-1$  (que nous appelons *coniques*) jouent un rôle particulier car il en part *deux bouts singuliers* (voir Fig. 1 plus haut).

Il se peut que ces deux bouts singuliers soient contenus dans la même feuille de  $\omega$ , c'est à dire qu'il existe un *lacet de connexion*  $\gamma$  avec  $\gamma - \{s\}$  contenu dans une feuille de  $\omega$  (voir Fig. 1). Ce sera une caractérisation des formes faiblement complètes; pour une forme complète, on peut trouver des lacets de connexion homotopes à 0 dans  $M$  (voir partie II).

I.5. Étant donné une forme  $\omega$ , nous considérerons le *revêtement d'intégration*  $\hat{p}: \hat{M} \rightarrow M$  associé à l'homomorphisme  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$ . Le  $\pi_1$  de  $\hat{M}$  est ainsi isomorphe à  $\text{Ker}[\omega]$ , et le groupe de transformations du revêtement est isomorphe à  $P(\omega)$ . Nous noterons

$$\hat{M}^* = \hat{p}^{-1}(M^*) = \hat{M} - \text{Sing}(\hat{p}^* \omega).$$

La forme  $\hat{p}^* \omega$  est exacte, et nous choisirons une *primitive globale*  $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  (unique à une constante additive près). Si  $\eta$  est une transformation du revêtement, la fonction  $\hat{f} \circ \eta - \hat{f}$  est une constante  $h(\eta) \in P(\omega)$ ; l'application  $\eta \mapsto h(\eta)$  est un isomorphisme entre le groupe du revêtement et  $P(\omega)$ .

Quand aucune confusion ne sera possible, nous désignerons par  $\hat{M}_{a,b}$  l'ensemble des points de  $\hat{M}$  où la valeur de  $\hat{f}$  appartient à  $]a, b[$  (pour  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ).

Soit  $\omega'$  cohomologue à  $\omega$ , et  $\hat{p}^* \omega' = d\hat{f}'$ . Alors la différence  $\hat{f}' - \hat{f}$  est laissée invariante par toute transformation du revêtement, et est donc *bornée* sur  $\hat{M}$ .

En quelques occasions nous considérerons également le *revêtement universel*  $\tilde{p}: \tilde{M} \rightarrow M$  et une primitive  $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\tilde{p}^* \omega$ .

Pour une forme  $\omega$  non singulière, le revêtement d'intégration  $\hat{M}$  s'appelle *revêtement des feuilles*, car  $\hat{M}$  est difféomorphe à  $L \times \mathbb{R}$  feuilleté comme un produit ( $L$  est une feuille quelconque de  $\omega$ ).

I.6. Nous utiliserons souvent des *champs de vecteurs*  $X$  sur  $M^*$  tels que  $\omega(X) \equiv 1$  (on construit de tels champs à l'aide d'une partition de l'unité). Le flot  $\phi_t$  de  $X$  est partiellement défini sur  $M^*$ , et il préserve  $\omega$ . En particulier, soit

$\tau > 0$  tel que  $\phi_t(x)$  soit défini pour tous les points d'un chemin  $\sigma$  contenu dans une feuille de  $\omega$ ; pour chaque  $t \in [0, \tau]$ , le chemin  $\phi_t(\sigma)$  est contenu dans une feuille de  $\omega$ . On a ainsi relevé  $\sigma$  sur les feuilles voisines.

Soit  $\omega$  de Morse sans centre, et  $X$  comme ci-dessus. Supposons que près des singularités  $X$  est proportionnel à un champ à singularités hyperboliques. Alors pour tout  $A \in \mathbb{R}$  l'ensemble des points où  $\phi_A$  n'est pas défini est de codimension au moins 1. On en déduit que tout point de  $M^*$  appartient à l'image d'une immersion  $i: \mathbb{R} \rightarrow M^*$  telle que  $i^*\omega = dt$ , et donc que tout point de  $\hat{M}^*$  appartient à l'image d'un plongement  $\hat{i}: \mathbb{R} \rightarrow \hat{M}^*$  tel que  $\hat{f} \circ \hat{i} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

I.7. L'espace des 1-formes fermées sur  $M$  sera muni de la topologie  $C^\infty$  (on pourrait également utiliser la topologie  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ); dans cet espace, les formes de Morse constituent un ouvert dense. Nous considérons ici certaines approximations d'une forme de Morse  $\omega$ .

I.7.1 Fixons un voisinage  $U$  de  $\text{Sing } \omega$ , et un champ de vecteurs  $Y$  sur  $M$  tel que  $\omega(Y) > 0$  sur  $M^*$ . Une fonction  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , sera dite admissible si:

- $g \equiv 0$  sur  $M - U$ .
- $dg \equiv 0$  sur un voisinage de  $\text{Sing } \omega$  (dépendant de  $g$ ).
- $dg(Y) > -\omega(Y)$  sur  $M^*$ .

Si  $g$  est admissible, alors  $\omega_g = \omega + dg$  est une forme de Morse cohomologue à  $\omega$ , qui a exactement les mêmes singularités que  $\omega$ .

On peut en fait montrer que toute forme cohomologue à  $\omega$  et assez proche de  $\omega$  est isotope à une forme  $\omega_g$ , et que deux formes  $\omega_g$  et  $\omega_h$  sont isotopes rel.  $\text{Sing } \omega$  ssi  $g - h$  est constante sur  $\text{Sing } \omega$ .

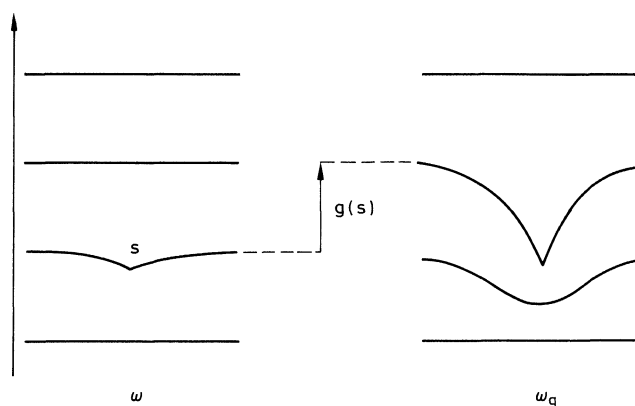
Nous n'aurons pas besoin de ces résultats, mais nous utiliserons la remarque suivante: soit  $V$  un voisinage de la fonction nulle dans la topologie  $C^\infty$ ; l'ensemble des valeurs sur  $\text{Sing } \omega$  des fonctions admissibles contenues dans  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^{\text{Sing } \omega}$ .

I.7.2. Géométriquement, le passage de  $\omega$  à  $\omega_g$  revient, pour chaque singularité  $s$  telle que  $g(s) \neq 0$ , à changer la feuille qui porte  $s$ . Si l'indice de  $s$  est compris entre 2 et  $n-2$ , tout se passe comme si  $s$  avait été déplacée de  $g(s)$  transversalement au feuilletage (voir une représentation très schématique sur la fig. 2). Si  $s$  est une singularité conique, l'opération a eu pour effet de remplacer des feuilles à une nappe par des feuilles à deux nappes, ou vice-versa (voir fig. 3).

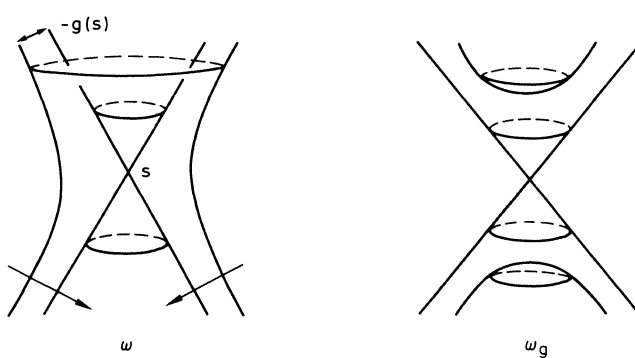
Grâce à cette interprétation on voit facilement que, si  $L$  est une feuille (non compacte) de  $\omega$  telle que  $L \cup \text{Sing } \omega$  est compact, alors on peut approcher  $\omega$  par des formes cohomologues ayant des feuilles compactes proches de  $\bar{L}$ .

I.7.3. Soit  $s$  une singularité conique telle qu'il existe un lacet de connexion  $\gamma$  (cf. I.4). Si  $\omega'$  est cohomologue à  $\omega$  et proche de  $\omega$ , elle aura une singularité conique  $s'$  proche de  $s$ , et nous affirmons qu'il existe pour  $s'$  un lacet de connexion  $\gamma'$  proche de  $\gamma$ .

En effet on peut, en partant d'un bout singulier de  $s'$ , relever le chemin  $\gamma$  sur une feuille de  $\omega'$ . Lorsqu'on termine de parcourir  $\gamma$ , l'égalité  $\int_\gamma \omega' = 0$  entraîne



**Fig. 2.** Indice de  $s$  entre 2 et  $n-2$ ,  $g(s) > 0$



**Fig. 3.**  $s$  d'indice  $n-1$ ,  $g(s) < 0$  (coupure de feuilles)

que ce chemin relevé revient près de  $s'$  sur l'autre bout singulier. Ceci montre l'existence de  $\gamma'$ .

Notons que ce raisonnement s'applique même si  $\omega'$  n'est pas cohomologue à  $\omega$ , à condition que  $\int_{\gamma} \omega' = 0$ ; ce sera en particulier le cas si  $\gamma$  est homotope à 0.

I.8. Sauf mention explicite du contraire, nous désignerons par  $M$  une variété fermée orientable de dimension  $n \geq 3$ , et par  $\omega$  une forme de Morse sans centre sur  $M$ . Dans la partie VI nous supposons simplement que  $\text{Sing } \omega$  est de codimension  $\geq 3$ .

## II. Définition des formes faiblement complètes et complètes

Soient  $M$  et  $\omega$  comme dans I.8.

**Proposition II.1.** Les propriétés suivantes sont équivalentes:

FC1. *L'espace des feuilles  $M^*/\omega$  s'identifie à  $\mathbb{R}/P(\omega)$ : deux points  $x, y \in M^*$  sont sur la même feuille de  $\omega$  si et seulement si  $\psi(x) = \psi(y)$ , où  $\psi: M^* \rightarrow \mathbb{R}/P(\omega)$  est définie par  $\psi(x) = \int_{x_0}^x \omega$  ( $x_0$  étant un point base).*

FC2. *Si  $\theta \subset M^*$  est un chemin d'intégrale nulle ( $\int_{\theta} \omega = 0$ ), ses extrémités appartiennent à la même feuille.*

FC3. *Pour toute singularité  $s$  conique (i.e. d'indice 1 ou  $n-1$ ), les deux bouts singuliers issus de  $s$  sont situés sur la même feuille (cf. I.4).*

FC4. *Pour une (donc toute) primitive  $\hat{f}$  de  $\hat{p}^*\omega$  sur le revêtement d'intégration  $\hat{M}$ , tous les niveaux  $\hat{f}^{-1}(c) \cap \hat{M}^*$  sont connexes.*

FC5. *Il existe une courbe fermée transverse  $C$  coupant toute feuille, telle que deux points de  $C$  soient sur la même feuille si et seulement si ils bordent un arc  $J \subset C$  avec  $|J| \in P(\omega)$ .*

**Proposition II.2.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

C1. *Tout chemin  $\theta \subset M^*$  d'intégrale nulle est homotope (à extrémités fixes) à un chemin contenu dans une feuille.*

C2. *Pour toute singularité conique  $s$ , les deux bouts singuliers issus de  $s$  sont situés sur la même feuille, et il existe un lacet de connexion  $\gamma$  homotope à 0 dans  $M$  (cf. I.4).*

C3. *Pour une (donc toute) primitive  $\tilde{f}$  de  $\tilde{p}^*\omega$  sur le revêtement universel  $\tilde{M}$ , tous les niveaux  $\tilde{f}^{-1}(c) \cap \tilde{M}^*$  sont connexes.*

**Définition.** Une forme  $\omega$  vérifiant les propriétés FC1 à FC5 (resp. C1 à C3) sera dite *faiblement complète* (resp. *complète*). Une classe de cohomologie  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  est (faiblement) complète si toute forme de Morse sans centre représentant  $\Omega$  est (faiblement) complète.

Nous donnerons dans la partie IV d'autres caractérisations des formes faiblement complètes (resp. complètes).

Faisons quelques commentaires avant de montrer ces propositions. Tout d'abord une forme non singulière, ou plus généralement sans singularité conique, est complète.

D'autre part on voit facilement que, pour une forme  $\omega$  faiblement complète de rang 1, toutes les feuilles régulières (qui sont compactes) sont homologues entre elles, et donc Poincaré-duales d'un multiple de  $[\omega]$ .

Si  $\omega$  est faiblement complète et  $r(\omega) \geq 2$ , alors le feuilletage défini par  $\omega$  est *minimal* et *uniquement ergodique*: cela résulte de FC5 et des propriétés correspondantes des rotations irrationnelles du cercle.

De I.7.3 on déduit que toute forme assez proche d'une forme complète est complète; toute forme cohomologue à une forme faiblement complète, et assez proche de celle-ci, est faiblement complète.

Notre notion de «faiblement complète» coïncide avec celle de «quasi-complète» introduite par Imanishi dans [Im3]. Par contre notre notion de «complète» ne coïncide pas avec celle de [Im3]; elle se rapproche plutôt de celle considérée par Thurston pour les  $\mathcal{H}$ -feuilletages [Th2, §4.8]: pour une

forme complète, l'application développante  $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est aussi proche que possible d'une fibration.

### Démonstration des propositions II.1 et II.2

On vérifie facilement les équivalences  $FC1 \Leftrightarrow FC2 \Leftrightarrow FC4 \Leftrightarrow FC5$  et  $C1 \Leftrightarrow C3$ , ainsi que les implications  $FC2 \Rightarrow FC3$  et  $C1 \Rightarrow C2$ . Les réciproques  $FC3 \Rightarrow FC2$  et  $C2 \Rightarrow C1$  vont être montrées simultanément, dans un cadre un peu plus général qui nous sera utile dans la partie IV.

Supposons que  $\omega$  vérifie FC3, et choisissons pour chaque singularité conique  $s_i$  un lacet de connexion  $\gamma_i$ . Soit  $\mathcal{N}$  le plus petit sous-groupe distingué de  $\pi_1 M$  contenant tous les  $\gamma_i$ .

**Lemme II.3.** *Soit  $\theta$  un chemin d'intégrale nulle joignant deux points  $x, y$  de  $M^*$ . Alors  $\theta$  est homotope à un chemin formé d'un lacet en  $x$  contenu dans  $\mathcal{N}$ , suivi d'un chemin dans une feuille (joignant  $x$  à  $y$ ).*

Ce lemme achèvera de démontrer les propositions II.1 et II.2: si  $\omega$  vérifie C2, nous pouvons en effet choisir les  $\gamma_i$  de façon que  $\mathcal{N} = \{1\}$ .

### Démonstration du lemme II.3

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M^*$  tel que  $\omega(X) \equiv 1$  et que près des singularités  $X$  soit proportionnel à un champ à singularité hyperbolique. On note  $\phi_t$  le flot (partiellement défini) de  $X$ , cf. I.6. Nous commençons par le cas simple où  $\omega$  n'a pas de singularité conique.

Soit  $\lambda: [0, 1] \rightarrow M^*$  une paramétrisation lisse de  $\theta$ , et  $j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction telle que  $dj = \lambda^* \omega$  et  $j(0) = j(1) = 0$ . Soit  $A > \|j\|_\infty$ . Puisqu'il n'y a pas de singularité conique (ni de centre), l'ensemble des points de  $M^*$  où  $\phi_A$  (resp.  $\phi_{-A}$ ) n'est pas défini est de codimension  $\geq 2$ .

En déplaçant légèrement  $\theta$  (sans que ses extrémités quittent leurs feuilles respectives), nous pouvons donc supposer que  $\phi_\tau(x)$  est défini pour tout  $x \in \theta$  et tout  $\tau \in [-A, A]$ . Posons alors  $\lambda_s(t) = \phi_{-sj(t)}(\lambda(t))$ , pour  $0 \leq s, t \leq 1$ . Cela définit une homotopie entre le chemin  $\lambda_0 = \lambda$  (qui représente  $\theta$ ) et un chemin  $\lambda_1$  contenu dans une feuille, CQFD.

La démonstration dans le cas général utilise une technique classique (cf. [Ro] théorème 5, ou [FLP] proposition p. 81). On déforme  $\theta$  en un chemin anguleux composé d'arcs  $I_k$  contenus dans des feuilles et d'arcs  $J_k$  contenus dans des orbites de  $X$  (voir Fig. 4), et on essaie de simplifier  $\theta$  en relevant sur les feuilles voisines (cf. I.6) les  $I_k$  où  $\theta$  fait demi-tour; si  $\theta$  ne fait jamais demi-tour, il est contenu dans une feuille puisque  $\int_\theta \omega = 0$ .

Cette opération de relèvement se bloque lorsqu'on arrive à une singularité conique  $s_i$ . On remplace alors  $\theta$  par un chemin formé d'un lacet  $\theta_1$  en  $x$  librement homotope à  $\gamma_i$  ou  $\gamma_i^{-1}$  (donc dans  $\mathcal{N}$ ) suivi d'un nouveau chemin  $\theta_2$  (voir Fig. 5), et on continue en essayant de simplifier  $\theta_2$ .

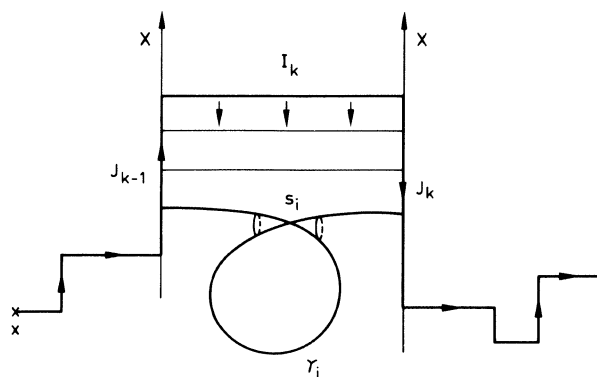


Fig. 4

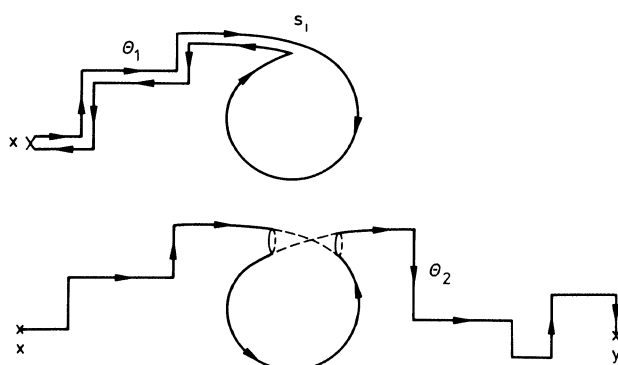


Fig. 5

Le point important est que le processus se termine après un nombre fini de ces remplacements. En effet il existe un  $\varepsilon > 0$  (indépendant de  $\theta$ ) tel que  $\phi_t(x)$  soit défini pour tout  $t \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  et tout  $x \in \bigcup_i (\gamma_i - \{s_i\})$ .

Si  $q$  est le nombre de points de  $I_k$  pour lesquels  $\phi_\varepsilon$  ou  $\phi_{-\varepsilon}$  n'est pas défini, on aura réussi après au plus  $q$  remplacements soit à supprimer un coin de  $I_k$  soit à diminuer la somme des  $|J_k|$  d'au moins  $2\varepsilon$ . Nous laissons les détails au lecteur.  $\square$

*Remarque.* Si  $\omega$  est complète, cette technique permet de montrer que tout chemin  $\theta \subset M^*$  est homotope soit à un chemin contenu dans une feuille soit à un chemin transverse (selon que  $\int_\theta \omega$  est nul ou non).

### III. Formes et classes de cohomologie faiblement complètes

Grâce à une construction de [AL], nous avons:

**Théorème III.1.** *Toute classe de cohomologie non nulle  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  est représentable par une forme (de Morse sans centre) faiblement complète.*

*Démonstration*

Nous ne donnons qu'une brève esquisse, car c'est essentiellement la section 1.2 de [AL]. Soit  $B \subset M$  un bouquet de cercles tel que l'inclusion induise un isomorphisme  $H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(B, \mathbb{R})$ , et soit  $Y$  un voisinage régulier de  $B$ . On construit sur  $Y$ , dans la classe de cohomologie correspondant à  $\Omega$ , une forme de Morse vérifiant FC5 par rapport à une courbe transverse  $C \subset Y$  (voir [AL]).

On étend ensuite cette forme en une forme de Morse  $\omega_1$  sur  $M$  (pouvant posséder des centres), et on considère l'union  $U$  des feuilles de  $\omega_1$  qui rencontrent  $C$ . Si  $U = M - \text{Sing } \omega_1$ , on a fini. Sinon, soit  $L$  une feuille de la frontière de  $U$ . Alors  $L \cup \text{Sing } \omega_1$  est compact et sépare  $M$  en deux composantes; de plus  $\omega_1$  est exacte dans la composante  $\mathcal{A}$  qui ne contient pas  $C$ . On modifie  $\omega_1$  dans un voisinage de  $\mathcal{A}$  de façon à faire disparaître tous les centres (il y en a au moins un), et après un nombre fini d'opérations on arrive à la forme sans centre cherchée.  $\square$

*Remarque.* En fait toute forme de Morse sans centre  $\omega_0$  peut être jointe à une forme faiblement complète  $\omega_1$  par un chemin de formes cohomologues, de Morse, ayant toutes les mêmes singularités. Ce chemin est du type  $\omega_t = \omega_0 + t \cdot dg$ , où  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convenablement choisie, nulle aux singularités de  $\omega_0$  d'indice différent de  $n-1$ , et prenant des valeurs très grandes aux singularités d'indice  $n-1$ .

**Corollaire III.2.** *Soit  $M^n$  une variété fermée orientable, avec  $n \geq 3$ . Tout homomorphisme surjectif  $\pi: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{Z}$  se représente par une application  $p$  de  $M$  dans un cercle, à singularités de Morse, telle que toutes les images réciproques  $p^{-1}(c)$  soient connexes.*

*Remarque.* L'hypothèse  $n \geq 3$  est en fait inutile.

*Démonstration*

Soit  $\omega$  une forme faiblement complète telle que  $[\omega] = \pi$ . L'application  $p: M \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  définie par  $p(x) = \int_{x_0}^x \omega$  induit  $\pi$ ; d'après FC1 elle est à fibres connexes.  $\square$

Nous allons maintenant étudier les formes qui ne sont pas faiblement complètes, et caractériser les classes de cohomologie faiblement complètes (c'est à dire dans lesquelles toute forme de Morse sans centre est faiblement complète). Nous énonçons d'abord les résultats sans les démonstrations, en commençant par les formes minimales.

**Théorème III.3.** *Toute forme  $\omega$  minimale non faiblement complète peut être approchée dans sa classe de cohomologie par des formes dont toutes les feuilles régulières sont compactes, et aussi par des formes faiblement complètes (donc minimales).*

*Remarques.* 1) Rappelons que  $\omega$  est de Morse sans centre, et que l'espace des formes fermées sur  $M$  est muni de la topologie  $C^\infty$  (ou  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , cf. I.7).

2) Si au contraire  $\omega$  est minimale et faiblement complète, il en est de même pour les formes cohomologues à  $\omega$  et proches de  $\omega$  (cf. partie II).

3) Ce théorème montre que, dans le théorème 2 de [AL], on peut imposer à  $\omega_1$  et  $\omega_3$  d'être des perturbations de  $\omega_2$ .

**Corollaire 1.** *Soit  $\omega$  une forme minimale telle que l'homomorphisme  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  ne puisse pas se factoriser par un groupe libre. Alors  $\omega$  est faiblement complète.*

**Corollaire 2.** *Si  $p_M: \pi_1 M \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})/\text{torsion}$  ne peut pas se factoriser par un groupe libre, alors dans presque toute classe de cohomologie les formes minimales sont faiblement complètes (en fait, toute forme minimale totalement irrationnelle est faiblement complète).*

*Remarque.* Les corollaires 1 et 2 ci-dessus sont plus forts que les résultats de [AL], qui montraient seulement l'unique ergodicité.

**Corollaire 3.** *Soit  $\omega$  une forme de rang  $\geq 2$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- a)  $\omega$  n'est pas faiblement complète.
- b)  $\omega$  est approchable dans sa classe de cohomologie par des formes possédant des feuilles compactes.

Soit  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$  de rang  $\geq 2$ , et  $F_m(\Omega)$  l'espace des formes de Morse sans centre représentant  $\Omega$ . Dans  $F_m(\Omega)$ , considérons les deux ouverts disjoints  $FC(\Omega)$ , constitué des formes faiblement complètes, et  $C(\Omega)$ , constitué des formes possédant des feuilles compactes.

D'après le corollaire 3, l'union de ces ouverts est dense (et même  $\overline{C(\Omega)} = F_m(\Omega) - FC(\Omega)$ ):

**Corollaire 4.** *Soit  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$  de rang  $\geq 2$ . Génériquement, une forme de Morse sans centre représentant  $\Omega$  ou bien est faiblement complète ou bien possède des feuilles compactes.  $\square$*

D'après le théorème III.1, on a toujours  $FC(\Omega) \neq \emptyset$ . Nous allons maintenant déterminer pour quelles classes  $\Omega$  on a  $C(\Omega) = \emptyset$ , c'est à dire  $FC(\Omega) = F_m(\Omega)$ .

Nous dirons qu'un homomorphisme de groupes  $\rho: \pi_1 M \rightarrow G$  se factorise de façon non triviale à travers un  $\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$  s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b & \\ \alpha \nearrow & \downarrow \beta & \\ \pi_1 M & \xrightarrow{\rho} & G \end{array}$$

avec  $\alpha$  surjective et  $a, b \geq 1$ .

**Théorème III.4.** *Soit  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*



- 1)  $\Omega$  n'est pas faiblement complète.
- 2)  $\Omega: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  se factorise de façon non triviale à travers un  $\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$ .
- 3)  $\Omega$  est représentable par une forme de Morse sans centre possédant une feuille compacte qui sépare  $M$ .

**Corollaire 1.** *Si l n'existe pas d'homomorphisme surjectif de  $\pi_1 M$  sur  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  (par exemple si  $\pi_1 M$  est résoluble), toute forme de Morse sans centre sur  $M$  est faiblement complète. La réciproque est également vraie.*

**Corollaire 2.** *Si  $p_M: \pi_1 M \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})/\text{torsion}$  ne se factorise pas de façon non triviale par un  $\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$ , presque toute classe  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$  est faiblement complète.*

*Si au contraire il y a factorisation de  $p_M$ , aucune classe n'est faiblement complète.*

**Corollaire 3.** *Si  $\text{Ker } \Omega_1 \subset \text{Ker } \Omega_2$  et si  $\Omega_2$  est faiblement complète, alors  $\Omega_1$  l'est aussi.*

**Corollaire 4.** *L'ensemble  $V(M) \subset H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  des classes faiblement complètes ne dépend que de  $\pi_1 M$ : si  $\rho: \pi_1 M_1 \rightarrow \pi_1 M_2$  est un isomorphisme, alors l'isomorphisme  $\rho^*: H^1(M_2, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(M_1, \mathbb{R})$  envoie  $V(M_2)$  sur  $V(M_1)$ .*

*Remarques. 1.* Si  $\omega$  possède une feuille compacte séparant  $M$ , il en est de même pour toute forme cohomologue à  $\omega$  et proche de  $\omega$ ; on ne peut donc pas approcher  $\omega$  par des formes cohomologues faiblement complètes. Il existe d'ailleurs des formes  $\omega$  telles qu'aucune forme proche de  $\omega$ , cohomologue ou non à  $\omega$ , ne soit faiblement complète.

*2.* À une forme de Morse sans centre  $\omega$  on peut associer un entier  $d(\omega) \geq 0$ , qui est nul si et seulement si  $\omega$  est faiblement complète; pour une forme «générique»,  $d(\omega)$  est simplement le nombre de singularités d'indice 1 (resp.  $n-1$ ) pour lesquelles il n'existe pas de lacet de connexion. On peut montrer qu'il existe toujours un épimorphisme de  $\pi_1 M$  sur le groupe libre à  $d(\omega)+1$  générateurs (ce qui généralise le corollaire 1 ci-dessus), et que pour une forme minimale on a soit  $d(\omega)=0$  soit  $d(\omega) \geq r(\omega)-1$ .

Nous allons maintenant montrer successivement les corollaires, puis les théorèmes III.3 et III.4.

#### *Démonstration des corollaires*

Pour montrer le corollaire 1 du théorème III.3, soit  $\omega$  minimale non faiblement complète. D'après le théorème il existe une forme cohomologue à  $\omega$  dont toutes les feuilles régulières sont compactes. On en déduit facilement ([AL], lemme 2.2) que  $[\omega]$  se factorise par un groupe libre.

Pour le corollaire 2, soit  $\omega$  minimale totalement irrationnelle (cf. I.1). Si  $p_M$  ne se factorise pas par un groupe libre, alors  $[\omega]$  non plus, et  $\omega$  est faiblement complète par le corollaire 1. On en déduit le corollaire 2 car presque toute classe de cohomologie est totalement irrationnelle.

Pour montrer  $a \Rightarrow b$  dans le corollaire 3, considérons une forme  $\omega$  qui n'est pas faiblement complète. Si  $\omega$  est minimale, on applique le théorème; si  $\omega$

possède des feuilles compactes, il n'y a rien à démontrer; sinon, il existe une feuille  $L$  avec  $L \cup \text{Sing } \omega$  compact (cf. I.3), et on applique I.7.2.

Si au contraire  $\omega$  est faiblement complète et de rang  $\geq 2$  (donc minimale), nous avons déjà remarqué que les formes cohomologues à  $\omega$  et proches de  $\omega$  sont minimales.

Enfin les corollaires du théorème III.4 se déduisent immédiatement de l'équivalence  $1 \Leftrightarrow 2$  du théorème.  $\square$

### Démonstration du théorème III.3

Soit  $\omega$  une forme minimale. Pour chaque singularité  $s_i$  d'indice  $n-1$  de  $\omega$ , fixons une petite boule  $B_i$  autour de  $s_i$ . Nous pouvons approcher  $\omega$  par des formes cohomologues  $\omega_g$ , comme dans I.7.1, où  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  est nulle en dehors des  $B_i$  et prend en chaque  $s_i$  la même valeur *négative*  $-\tau_g < 0$ . Nous allons prouver la première partie du théorème en montrant que, si  $\omega$  n'est pas faiblement complète, ces formes  $\omega_g$  sont à feuilles régulières compactes.

Soit  $C$  une courbe disjointe des  $B_i$ , transverse à  $\omega$ . Nous l'identifions à un cercle  $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$  grâce à la mesure «de Lebesgue» induite par  $\omega$ . Cette courbe est également transverse à  $\omega_g$ , et deux points de  $C$  qui sont sur la même feuille de  $\omega_g$  sont aussi sur la même feuille de  $\omega$ : puisque les  $g(s_i)$  sont négatifs, on passe de  $\omega$  à  $\omega_g$  en «coupant» des feuilles dans les  $B_i$  (cf. I.7.2).

On a en fait plus: si deux points  $x$  et  $y$  de  $C$  sont sur la même feuille de  $\omega_g$ , alors  $x+t$  et  $y+t$  sont sur la même feuille de  $\omega$  pour tout  $t \in [0, \tau_g]$ . En effet les singularités coniques constituent le seul obstacle au relèvement sur les feuilles voisines d'un chemin contenu dans une feuille (cf. démonstration du lemme II.3).

Remarquons enfin que nous pouvons supposer que  $C$  rencontre toute feuille de  $\omega_g$ : il suffit pour cela d'imposer à  $C$  de passer au moins deux fois près de chaque  $s_i$ , de façon qu'elle rencontre près de  $s_i$  chacun des bouts singuliers, et de choisir les  $B_i$  assez petits.

Considérons maintenant les pseudogroupes d'holonomie  $\Gamma \supset \Gamma'$  induits sur  $C$  par  $\omega$  et  $\omega_g$  respectivement. Ce sont des *pseudogroupes de rotations*, en ce sens que tout élément de  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ) est, sur chaque composante de son domaine de définition, la restriction d'une rotation de  $C$ .

L'orbite d'un point  $x \in C$  par  $\Gamma$  ou  $\Gamma'$ , notée  $\Gamma(x)$  ou  $\Gamma'(x)$ , est égale à l'intersection avec  $C$  de la feuille de  $\omega$  ou  $\omega_g$  passant par  $x$ . Comme  $\omega$  est minimale,  $\Gamma$  agit *minimalement*, c'est à dire que toute orbite  $\Gamma(x)$  est dense.

Grâce aux caractérisations FC3 et FC5 des formes faiblement complètes (voir prop. II.1), on voit facilement que  $\omega$  est faiblement complète si et seulement si  $\Gamma$  est un groupe de rotations, c'est à dire si  $y \in \Gamma(x) \Rightarrow Ry \in \Gamma(Rx)$  pour toute rotation  $R$  de  $C$ ; une caractérisation équivalente est qu'il existe un sous-groupe  $G$  du groupe des rotations de  $C$ , tel qu'un homéomorphisme  $\gamma: U \rightarrow V$  entre ouverts de  $C$  soit dans  $\Gamma$  ssi, pour toute composante  $U'$  de  $U$ ,  $\gamma|_{U'}$  est la restriction d'un élément de  $G$ .

Nous voulons montrer que, si  $\omega$  n'est pas faiblement complète, les feuilles régulières de  $\omega_g$  sont compactes. Supposons le contraire. Comme  $C$  rencontre

toute feuille de  $\bar{\omega}_g$ , elle rencontre une composante minimale  $W$  de  $\omega_g$ , et toute orbite de  $\Gamma'$  dans  $W \cap C$  est localement dense. Il ne nous reste donc qu'à montrer le lemme suivant:

**Lemme III.5.** *Soit  $\Gamma$  un pseudogroupe de rotations d'un cercle  $C$ , et  $\Gamma' \subset \Gamma$  un sous-pseudogroupe. On suppose qu'il existe  $\tau > 0$  tel que, si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite de  $\Gamma'$ , alors  $x+t$  et  $y+t$  sont dans la même orbite de  $\Gamma$  pour tout  $t \in [0, \tau]$ . Si  $\Gamma$  agit minimalement et si  $\Gamma'$  possède une orbite localement dense (en particulier si  $\Gamma'$  agit minimalement), alors  $\Gamma$  est un groupe de rotations.*

*Remarque.* En particulier, un pseudogroupe qui contient une rotation irrationnelle définie sur tout le cercle est un groupe de rotations.

#### Démonstration

Supposons d'abord que  $\Gamma'$  possède une orbite dense et que, si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite de  $\Gamma'$ , alors  $x+t$  et  $y+t$  sont dans la même orbite de  $\Gamma$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Il existe alors dans le groupe des rotations de  $C$  un sous-groupe dense  $G_0$  tel que  $x \in C$  et  $R_0 \in G_0 \Rightarrow R_0 x \in \Gamma(x)$ .

Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma$ , défini sur un intervalle ouvert  $I \subset C$ , et appelons  $R$  la rotation dont  $\gamma$  est la restriction. Étant donné  $y \in C$ , soit  $R_0 \in G_0$  avec  $R_0 y \in I$ . On a alors  $R_0 y \in \Gamma(y)$ , d'où  $RR_0 y \in \Gamma(y)$  et  $Ry = R_0^{-1} RR_0 y \in \Gamma(y)$ , ce qui montre que  $\Gamma$  est un groupe de rotations.

Passons maintenant au cas général. Soit  $J \subset C$  un intervalle dans lequel une orbite  $\Gamma'(p)$  est dense, et soient  $a, b$  deux points de  $J \cap \Gamma'(p)$  dont la distance est  $< \tau$ . On vérifie que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  induisent sur le cercle  $\bar{C} = [a, b]/a \sim b$  des pseudogroupes  $\bar{\Gamma}$  et  $\bar{\Gamma}'$ .

Le choix de  $a$  et  $b$  entraîne de plus que  $\bar{\Gamma}$  et  $\bar{\Gamma}'$  vérifient sur  $\bar{C}$  les hypothèses du cas particulier ci-dessus, donc que  $\bar{\Gamma}$  est un groupe de rotations. De la minimalité de  $\Gamma$  on déduit que  $\Gamma$  est aussi un groupe de rotations.  $\square$

Pour la deuxième partie du théorème III.3, approchons  $\omega$  par des formes  $\omega_g$ , où maintenant  $g$  prend en chaque  $s_i$  la même valeur positive  $\tau_g$ . On voit que  $\omega_g$  est faiblement complète en appliquant de nouveau le lemme III.5, mais cette fois-ci  $\Gamma'$  est le pseudogroupe d'holonomie de  $\omega$  et  $\Gamma$  celui de  $\omega_g$ .  $\square$

#### Démonstration du théorème III.4

Soit  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$ , et  $L^{n-1} \subset M^n$  une sous-variété compacte, connexe, orientable, sans bord, de codimension 1. Nous dirons que  $L$  est  $\Omega$ -exacte si  $\Omega$  induit sur  $L$  la classe nulle. Par exemple, une feuille compacte d'une forme représentant  $\Omega$  est une sous-variété  $\Omega$ -exacte.

Une sous-variété  $\Omega$ -exacte  $L$  est *triviale* si ou bien  $L$  sépare  $M$  et  $\Omega$  induit la classe nulle dans une des deux composantes de  $M - L$  (par exemple si  $L$  est une sphère bordant une boule), ou bien  $r(\Omega) = 1$  et  $L$  est Poincaré-duale d'un multiple non nul de  $\Omega$  (i.e.  $\Omega(u)$  est proportionnel au nombre d'intersection algébrique de  $u \in H_1(M, \mathbb{Z})$  avec  $L$ ).

Notons que, s'il existe une sous-variété  $\Omega$ -exacte non triviale  $L$ , il en existe aussi une qui sépare  $M$ : si  $L$  ne sépare pas, on choisit un chemin  $\theta$  d'intégrale non nulle coupant  $L$  en exactement un point (transversalement), et on remplace  $L$  par le bord d'un voisinage régulier de  $L \cup \theta$ .

Nous pouvons maintenant énoncer une quatrième condition équivalente à celles du théorème III.4:

4) *Il existe une sous-variété  $\Omega$ -exacte non triviale.*

La démonstration du théorème va consister à prouver successivement  $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3$  (bien sûr  $3 \Rightarrow 1$  est trivial).

*Démonstration de  $1 \Rightarrow 4$*

Supposons  $r(\Omega) \geq 2$  (nous laissons au lecteur le cas facile où  $r(\Omega) = 1$ ). Si  $\Omega$  n'est pas faiblement complète, alors d'après le corollaire 1 du théorème III.3 on peut la représenter par une forme de Morse sans centre  $\omega$  possédant une feuille compacte  $L$ .

Cette feuille définit une sous-variété  $\Omega$ -exacte, qui ne peut pas être triviale: si  $L$  séparait  $M$  et si  $\omega$  était exacte dans une composante de  $M - L$ , alors  $\omega$  devrait posséder un centre dans cette composante.  $\square$

*Démonstration de  $4 \Rightarrow 2$*

Soit  $L$  une sous-variété  $\Omega$ -exacte non triviale. D'après ce qui précède nous pouvons supposer que  $L$  sépare  $M$ . Le groupe fondamental de l'espace  $M/L$  obtenu en écrasant  $L$  en un point est de façon naturelle un produit libre  $G * G'$ , et on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} & & G * G' \\ & \nearrow \alpha_1 & \downarrow \beta_1 \\ \pi_1 M & \xrightarrow{\Omega} & \mathbb{R} \end{array}$$

Puisque  $L$  n'est pas triviale,  $\beta_1(G)$  et  $\beta_1(G')$  ne sont ni l'un ni l'autre réduits à  $\{0\}$ , et on factorise  $\beta_1$  par

$$(G/G \cap \text{Ker } \beta_1) * (G'/G' \cap \text{Ker } \beta_1) \simeq \mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b. \quad \square$$

*Démonstration de  $2 \Rightarrow 4$*

**Lemme III.6.** *S'il existe une factorisation*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b \\ & \nearrow \alpha & \downarrow \beta \\ \pi_1 M & \xrightarrow{\Omega} & \mathbb{R} \end{array}$$

( $\alpha$  surjective,  $a, b \geq 1$ ), alors il en existe aussi une pour laquelle  $\beta$  est injective sur chacun des facteurs  $\mathbb{Z}^a$  et  $\mathbb{Z}^b$ .

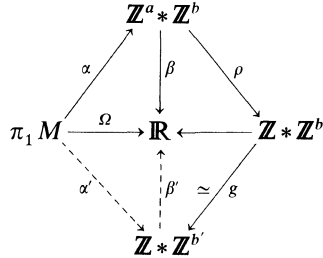
### Démonstration

Si ni  $\beta(\mathbb{Z}^a)$  ni  $\beta(\mathbb{Z}^b)$  n'est réduit à  $\{0\}$ , on factorise simplement par

$$(\mathbb{Z}^a/\mathbb{Z}^a \cap \text{Ker } \beta) * (\mathbb{Z}^b/\mathbb{Z}^b \cap \text{Ker } \beta).$$

Sinon, nous pouvons supposer  $\beta(\mathbb{Z}^a) = \{0\}$  et  $\beta(\mathbb{Z}^b)$  isomorphe à  $\mathbb{Z}^{b'}$ ,  $b' \geq 1$ . Soit  $\rho_1: \mathbb{Z}^a \rightarrow \mathbb{Z}$  un épimorphisme. On commence par factoriser  $\beta$  à travers l'homomorphisme surjectif  $\rho: \mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b \rightarrow \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}^b/\mathbb{Z}^b \cap \text{Ker } \beta) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}^{b'}$  obtenu à partir de  $\rho_1$  et de la projection canonique.

On remarque ensuite qu'il existe un automorphisme  $g$  de  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^{b'}$  qui induit l'identité sur  $\mathbb{Z}^{b'}$  et envoie un générateur  $z$  du facteur  $\mathbb{Z}$  sur  $zu$ , où  $u \in \mathbb{Z}^{b'}$  est non nul. On en déduit la factorisation cherchée, avec  $\alpha' = g \circ \rho \circ \alpha$  (voir diagramme).



□

Pour montrer  $2 \Rightarrow 4$ , nous partons donc d'une factorisation de  $\Omega$  par  $\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$ , avec  $\beta$  injective sur chacun des facteurs. Nous commençons par le cas où  $r(\Omega) \geq 2$ .

Soit  $H$  l'espace obtenu à partir d'un segment  $J = [0, 1]$  et de tores  $T^a$  et  $T^b$  en identifiant une extrémité de  $J$  avec un point de  $T^a$  et l'autre avec un point de  $T^b$ . C'est un  $K(\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b, 1)$ , et nous pouvons représenter  $\alpha$  par une application  $p: M \rightarrow H$ .

Soit  $c \in \mathring{J}$  une valeur régulière. Alors  $p^{-1}(c)$  est une collection finie non vide de sous-variétés  $\Omega$ -exactes, et nous choisissons  $p$  et  $c$  de manière à en minimiser le nombre. Nous allons conclure en montrant que les composantes de  $p^{-1}(c)$  ne sont pas toutes triviales.

Supposons au contraire qu'elles le soient. Il existe alors une composante  $\mathcal{A}$  de  $M - p^{-1}(c)$ , sur laquelle  $\Omega$  est exacte, et dont l'adhérence ne contient qu'une seule composante  $T$  de  $p^{-1}(c)$ . Pour tout lacet  $v$  contenu dans  $\mathcal{A}$ , l'image  $p(v)$  représente un élément de  $\text{Ker } \beta \subset \pi_1 H$ ; de plus  $p(v)$  est librement homotope à un lacet contenu dans  $T^a$  ou  $T^b$ .

Puisque  $\beta$  est injective sur chacun des facteurs  $\mathbb{Z}^a$  et  $\mathbb{Z}^b$ , on en déduit que  $p(v)$  est homotope à 0 dans  $H$ . Ceci permet de modifier  $p$  au voisinage de  $\mathcal{A}$ , sans changer l'application induite sur le  $\pi_1$ , de façon à retirer de  $p^{-1}(c)$  la composante  $T$ . On contredit ainsi le choix de  $p$  et  $c$ .

Considérons maintenant le cas où  $r(\Omega)=1$ . Nous avons alors  $a=b=1$ , et nous représentons  $\alpha$  par une application  $p$  de  $M$  dans un bouquet de deux cercles orientés  $C_1 \vee C_2$ . Soit  $c \in C_1$  une valeur régulière;  $p^{-1}(c)$  est une collection non vide de sous-variétés  $\Omega$ -exactes, et nous affirmons qu'elles ne sont pas toutes triviales.

Supposons le contraire. Il existe alors  $t \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout lacet  $v$  dans  $M$ , le nombre de passages de  $p(v)$  en  $c$  soit égal à  $t\Omega(v)$ ; le nombre de passages est bien sûr compté algébriquement, en comparant le sens de passage de  $p(v)$  en  $c$  et l'orientation de  $C_1$ . On obtient la contradiction cherchée en considérant un lacet  $v_2$  tel que  $p(v_2)$  soit librement homotope à  $C_2$  (ce qui donne  $t=0$ ), et un lacet  $v_1$  tel que  $p(v_1)$  soit homotope à  $C_1$  (ce qui donne  $t \neq 0$ ).  $\square$

#### Démonstration de $4 \Rightarrow 3$

Si  $\Omega$  vérifie 4, il existe dans  $M$  une sous-variété  $\Omega$ -exacte non triviale  $L$  qui sépare  $M$ . Nous cherchons à représenter  $\Omega$  par une forme de Morse sans centre dont  $L$  soit une feuille. En considérant séparément l'adhérence de chaque composante de  $M-L$ , nous sommes ramenés au lemme suivant.

**Lemme III.7.** *Soit  $\omega'$  une 1-forme fermée sur une variété compacte orientable  $P^n$  dont le bord est non vide et connexe ( $n \geq 3$ ). On suppose que  $\omega'$  n'est pas exacte, mais que la forme induite sur  $\delta P$  l'est. Alors  $\omega'$  est cohomologue à une forme de Morse sans centre dont  $\delta P$  est une feuille sortante (resp. rentrante).*

Par feuille sortante (resp. rentrante), nous voulons dire que  $\delta P$  est une feuille le long de laquelle l'orientation transverse du feuilletage pointe vers l'extérieur de  $P$  (resp. vers l'intérieur).

#### Démonstration

On raisonne comme dans la démonstration du théorème III.1, et nous nous bornons à signaler les différences.

Le bouquet de cercles  $B$  est choisi de façon qu'il y ait un isomorphisme  $H^1(P, \delta P; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(B, \mathbb{R})$ . Après avoir construit la forme au voisinage de  $B$ , on choisit un chemin orienté  $\theta$  allant d'un point de  $C$  (courbe transverse coupant toute feuille de la forme définie sur  $Y$ ) à un point de  $\delta P$ ; dans  $Y$  ce chemin doit être transverse au feuilletage, dans le sens positif (resp. négatif) si l'on veut  $\delta P$  sortant (resp. rentrant).

L'extension  $\omega_1$  est construite de façon que  $\delta P$  soit une feuille et que  $\theta$  soit transverse, et on élimine les centres en considérant l'union  $U$  des feuilles rencontrant  $C \cup \theta$ .  $\square$

### IV. Structure transverse et $\pi_1$ des feuilles

Nous établissons ici des critères pour qu'une forme soit faiblement complète ou complète (propositions IV.1 et IV.6). Étant donné une forme  $\omega$ , soit  $\mathcal{L}(\omega)$  le

plus petit sous-groupe distingué de  $\pi_1 M$  contenant, pour toute feuille  $L$ , l'image de l'homomorphisme  $\pi_1 L \rightarrow \pi_1 M$  induit par l'inclusion. On a bien sûr  $\mathcal{L}(\omega) \subset \text{Ker}[\omega]$ .

**Proposition IV.1.** *Une forme de Morse sans centre  $\omega$  est faiblement complète si et seulement si  $\mathcal{L}(\omega) = \text{Ker}[\omega]$ .*

*Remarque.* Si  $\omega$  est faiblement complète, le quotient  $\pi_1 M / \mathcal{L}(\omega)$  est donc abélien libre. Si au contraire  $\omega$  n'est pas faiblement complète, on peut montrer que ce quotient est un produit libre non trivial de groupes abéliens libres.

**Corollaire IV.2.** *Soit  $\omega$  une forme de Morse sans centre, de rang  $r(\omega) \geq 2$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1)  $\omega$  est faiblement complète.
- 2) Il existe une feuille  $L$  telle que  $\text{Ker}[\omega]$  soit le plus petit sous-groupe distingué de  $\pi_1 M$  contenant l'image de  $\pi_1 L$ .
- 3) Pour toute feuille  $L$ ,  $\text{Ker}[\omega]$  est le plus petit sous-groupe distingué de  $\pi_1 M$  contenant l'image de  $\pi_1 L$ .

**Corollaire IV.3.** *Soit  $\omega$  comme dans le corollaire IV.2. Si  $\omega$  possède une feuille simplement connexe, alors ou bien  $\pi_1 M$  est abélien libre de rang  $r(\omega)$  ou bien il existe un épimorphisme de  $\pi_1 M$  sur  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .*

Nous démontrons d'abord les corollaires.

#### *Démonstration du corollaire IV.2*

Les implications  $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$  sont vraies même si  $r(\omega) = 1$ :  $3 \Rightarrow 2$  est trivial, et  $2 \Rightarrow 1$  résulte immédiatement de la proposition. Pour  $1 \Rightarrow 3$ , on remarque qu'une forme faiblement complète de rang  $\geq 2$  est minimale, et donc que pour toute feuille  $L$  le sous-groupe distingué de  $\pi_1 M$  engendré par l'image de  $\pi_1 L$  est égal à  $\mathcal{L}(\omega)$ .  $\square$

*Remarque.* Il existe des formes faiblement complètes de rang 1 pour lesquelles 3 est faux.

#### *Démonstration du corollaire IV.3*

Il résulte immédiatement du corollaire IV.2 ( $1 \Rightarrow 3$ ) et du corollaire 1 du théorème III.3.  $\square$

#### *Démonstration de la proposition IV.1*

La partie «seulement si» résulte immédiatement du lemme II.3, compte tenu de l'inclusion évidente  $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}(\omega)$ .

Pour la réciproque, considérons une forme  $\omega$ , et une primitive  $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\hat{p}^*\omega$  (cf. I.5). Rappelons que nous notons  $\hat{M}_{-\infty, c}$  l'ouvert  $\hat{f}^{-1}(]-\infty, c[)$ ; de même  $\hat{M}_{c, +\infty} = \hat{f}^{-1}(]c, +\infty[)$ . Dans le lemme suivant nous ne supposons rien sur les singularités de  $\omega$ .

**Lemme IV.4.** *Soit  $\omega$  une forme non exacte. Pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , chacun des ouverts  $\hat{M}_{-\infty, c}$  et  $\hat{M}_{c, +\infty}$  possède exactement une composante sur laquelle  $\hat{f}$  n'est pas bornée.*

#### Démonstration

Soit  $\omega'$  une forme de Morse sans centre, faiblement complète, cohomologue à  $\omega$  (cf. théorème III.1). Le lemme est vrai pour  $\omega'$ , puisque  $\omega'$  vérifie FC4.

Soit  $\hat{f}': \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  une primitive de  $\hat{p}^*\omega'$ . Nous savons que  $\hat{f}' - \hat{f}$  est bornée (cf. I.5), et on en déduit facilement que le lemme est également vrai pour  $\omega$ .  $\square$

*Remarque.* On peut montrer ce lemme sans faire appel au théorème III.1, par exemple en utilisant une forme harmonique cohomologue à  $\omega$ .

Du lemme IV.4 on déduit:

**Corollaire IV.5.** *Soit  $\omega$  une forme de Morse sans centre. Pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , les ouverts  $\hat{M}_{-\infty, c}$  et  $\hat{M}_{c, +\infty}$  sont connexes.*

#### Démonstration

Cela résulte du lemme IV.4 et du fait que, pour une forme de Morse sans centre, tout point de  $\hat{M}^*$  appartient à l'image d'un plongement  $\hat{i}: \mathbb{R} \rightarrow \hat{M}^*$  tel que  $\hat{f} \circ \hat{i} = \text{id}_{\mathbb{R}}$  (voir I.6).  $\square$

Terminons maintenant de montrer la proposition IV.1. Soit  $\omega$  une forme de Morse sans centre, non faiblement complète. Il existe un niveau  $\hat{f}^{-1}(c) \cap \hat{M}^*$  possédant au moins deux composantes  $T_1$  et  $T_2$ . Le corollaire IV.5 nous permet de construire dans  $\hat{M}^*$  un lacet rencontrant chaque  $T_i$  en exactement un point (et transversalement). La projection de ce lacet dans  $M$  représente un élément de  $\text{Ker}[\omega]$  qui ne peut pas être dans  $\mathcal{L}(\omega)$ .  $\square$

**Proposition IV.6.** *Soit  $\omega$  une forme de Morse sans centre. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1)  $\omega$  est complète.
- 2) Il existe une feuille  $L$  telle que la suite  $\pi_1 L \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{[\omega]} \mathbb{R}$  soit exacte.
- 3) Pour toute feuille  $L$ , la suite  $\pi_1 L \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{[\omega]} \mathbb{R}$  est exacte.
- 4) Pour un (donc tout)  $c \in \mathbb{R}$ , les ouverts connexes  $\hat{M}_{-\infty, c}$  et  $\hat{M}_{c, +\infty}$  engendrent  $\pi_1 \hat{M}$ .

Comme d'habitude,  $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de  $\hat{p}^*\omega$ . Nous disons qu'une sous-variété  $T \subset \hat{M}$  engendre  $\pi_1 \hat{M}$  si l'inclusion induit une surjection



$\pi_1 T \rightarrow \pi_1 \hat{M}$ . Si  $\hat{M}_{-\infty, c_0}$  engendre  $\pi_1 \hat{M}$ , il en est de même pour tout  $\hat{M}_{-\infty, c}$  puisque  $\hat{M}_{-\infty, c}$  contient l'image de  $\hat{M}_{-\infty, c_0}$  par une transformation convenable du revêtement.

#### Démonstration de la proposition IV.6

Nous montrons successivement  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ . L'implication  $1 \Rightarrow 2$  est claire puisqu'une forme complète vérifie C1. Si d'autre part  $L$  est une feuille telle que l'image de  $\pi_1 L$  dans  $\pi_1 M$  soit égale à  $\text{Ker}[\omega]$ , n'importe quelle composante de  $\hat{p}^{-1}(L)$  engendre  $\pi_1 \hat{M}$  et est contenue dans un  $\hat{f}^{-1}(c)$ ; ceci montre  $2 \Rightarrow 4$ .

Pour  $4 \Rightarrow 3$ , nous considérons une composante  $T$  d'un  $\hat{f}^{-1}(c) \cap \hat{M}^*$ , et nous devons montrer qu'elle engendre  $\pi_1 \hat{M}$ . L'argument est classique (cf. [Hem] pp. 105–106), et nous ne faisons que l'esquisser.

Prenons un point base  $x \in T$ , et un élément  $e \in \pi_1(\hat{M}, x)$ . L'hypothèse 4 nous permet de représenter  $e$  par deux lacets  $e^+ \subset \hat{f}^{-1}([c, +\infty[)$  et  $e^- \subset \hat{f}^{-1}(]-\infty, c])$ . On considère une homotopie entre  $e^+$  et  $e^-$  dans  $\hat{M}^*$ , et on conclut en étudiant la trace sur  $T$  de cette homotopie.

Supposons enfin que  $\omega$  vérifie 3. Si un chemin  $\theta \subset M^*$  est d'intégrale nulle, ses extrémités peuvent être jointes par un chemin  $\theta_0$  contenu dans une feuille  $L$  (car d'après la proposition IV.1 la forme  $\omega$  est faiblement complète). D'après 3, le lacet formé par  $\theta$  et  $\theta_0$  est homotope à un lacet de  $L$ , ce qui signifie que  $\theta$  est homotope (à extrémités fixes) à un chemin contenu dans  $L$ .  $\square$

*Remarque.* On peut prouver  $3 \Rightarrow 1$  directement, sans passer par la proposition IV.1: on montre successivement que toute feuille est coupée par une transversale fermée, puis que  $\omega$  vérifie C2. Cette démonstration marche encore si on suppose seulement que pour toute feuille  $L$  l'image de  $\pi_1 L$  contient le sous-groupe des commutateurs de  $\pi_1 M$  (en fait  $\omega$  est complète dès qu'il existe une feuille  $L$  telle que l'image de  $\pi_1 L$  contienne le sous-groupe des commutateurs).

#### V. Classes de cohomologie complètes

L'équivalence  $1 \Leftrightarrow 4$  de la proposition IV.6 va nous permettre de montrer que la complétude ou la non-complétude d'une forme ne dépend que de sa classe de cohomologie.

**Théorème V.1.** *Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux formes de Morse sans centre, cohomologues. Alors  $\omega'$  est complète si et seulement si  $\omega$  est complète.*

#### Démonstration

Supposons  $\omega$  complète, et montrons que  $\omega'$  l'est aussi. Soient  $\hat{f}$  et  $\hat{f}'$  des primitives de  $\hat{p}^* \omega$  et  $\hat{p}^* \omega'$  respectivement, et  $A > \|\hat{f} - \hat{f}'\|_\infty$ . Pour  $c \in \mathbb{R}$ , on a  $\hat{f}^{-1}(]-\infty, c - A]) \subset \hat{f}'^{-1}(]-\infty, c])$  et  $\hat{f}^{-1}(]c + A, +\infty[) \subset \hat{f}'^{-1}(]c, +\infty[)$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarques.* D. Henč a montré dans [Hen] qu'une forme  $\omega$  de Morse sans feuille compacte, cohomologue à une forme minimale non singulière, est minimale et uniquement ergodique. Sa démonstration donne en fait la complétude de  $\omega$ , et peut se généraliser en une démonstration du théorème V.1.

On peut imaginer d'autres propriétés des formes fermées ne dépendant que de leur classe de cohomologie. Par exemple on peut demander que les  $\hat{M}_{-\infty, c}$  et les  $\hat{M}_{c, +\infty}$  engendrent  $H_i \hat{M}$  ( $i \geq 2$ ), ou représentent toute classe d'homotopie libre de lacets. On peut également considérer séparément les  $\hat{M}_{-\infty, c}$  et les  $\hat{M}_{c, +\infty}$ , ou bien remplacer  $\hat{M}$  par d'autres revêtements (par exemple celui correspondant au sous-groupe des commutateurs de  $\pi_1 M$ , ou au noyau de  $p_M$ ).

**Théorème V.2.** *Soit  $\omega$  une forme de Morse sans centre. Si  $\text{Ker}[\omega]$  est de type fini, alors  $\omega$  est complète. La réciproque est vraie si  $\omega$  est de rang 1.*

#### Démonstration

Elle utilise un petit argument bien connu (cf. [Hem] p. 105). Si  $\text{Ker}[\omega]$  est de type fini, il existe un compact  $K \subset \hat{M}$  qui engendre  $\pi_1 \hat{M}$ . Soit  $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  une primitive de  $\hat{p}^* \omega$ , et  $c \in \mathbb{R}$ . En appliquant à  $K$  des transformations convenables du revêtement, on peut l'envoyer dans  $\hat{M}_{-\infty, c}$  ou dans  $\hat{M}_{c, +\infty}$ . D'après la proposition IV.6, la forme  $\omega$  est complète.

Réciproquement, soit  $\omega$  complète de rang 1, et  $L$  une feuille régulière de  $\omega$ . D'après la proposition IV.6 ( $1 \Rightarrow 3$ ),  $\text{Ker}[\omega]$  est l'image de  $\pi_1 L$  dans  $\pi_1 M$ ; il est de type fini car  $L$  est compacte.  $\square$

*Remarque.* La réciproque peut être fausse si  $r(\omega) \geq 2$ . Il existe sur certaines variétés de dimension 3 des formes  $\omega$  et  $\omega'$  totalement irrationnelles (donc telles que  $\text{Ker}[\omega] = \text{Ker}[\omega'] = \text{Ker } p_M$ ), avec  $\omega$  complète mais pas  $\omega'$  (cf. [Th 1], et la discussion ci-dessous sur la dimension trois).

Du théorème V.2 on déduit immédiatement:

**Corollaire V.3.** *Si le noyau de  $p_M: \pi_1 M \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})/\text{torsion}$  est de type fini, toute forme sur  $M$  est complète.*  $\square$

**Corollaire V.4.** *Si  $\pi_1 M$  est abélien, ou nilpotent, ou contient un sous-groupe polycyclique d'indice fini, toute forme sur  $M$  est complète.*  $\square$

*Remarques.* Comme nous l'a fait remarquer E. Ghys, le corollaire V.4 ne s'étend pas au cas résoluble. Par contre nous pouvons montrer que toute forme sur  $M$  est complète si  $\pi_1 M$  ne contient pas de sous-monoïde libre non abélien (en particulier si  $\pi_1 M$  est à croissance sous-exponentielle). En fait, d'après le théorème B1 de [BNS], les variétés sur lesquelles toute forme est complète sont exactement celles avec  $\text{Ker } p_M$  de type fini (ou de façon équivalente  $[\pi_1 M, \pi_1 M]$  de type fini).

Le cas où  $\pi_1 M$  est abélien a été traité par Imanishi [Im2].

Considérons maintenant dans  $H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  l'ensemble  $U(M)$  formé des classes de cohomologie complètes.

**Théorème V.5.**  $U(M)$  ne dépend que de  $\pi_1 M$ : si  $\rho$  est un isomorphisme de  $\pi_1 M_1$  sur  $\pi_1 M_2$ , alors  $\rho^*: H^1(M_2, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(M_1, \mathbb{R})$  envoie  $U(M_2)$  sur  $U(M_1)$ . En particulier,  $U(M)$  est laissé invariant par l'action sur  $H^1(M, \mathbb{R})$  du groupe des automorphismes de  $\pi_1 M$ .

#### Démonstration

Considérons deux classes  $\Omega_2 \in U(M_2)$  et  $\Omega_1 = \rho^* \Omega_2 \in H^1(M_1, \mathbb{R})$ . Nous devons montrer  $\Omega_1 \in U(M_1)$ . Pour  $i=1$  ou  $2$ , représentons  $\Omega_i$  par une forme de Morse sans centre  $\omega_i$  sur  $M_i$ . Considérons comme d'habitude le revêtement  $\hat{p}_i: \hat{M}_i \rightarrow M_i$  et une primitive  $\hat{f}_i$  de  $\hat{p}_i^* \omega_i$ .

Soit  $K_i \subset M_i$  le 2-squelette d'une triangulation de  $M_i$ , et  $\hat{K}_i = \hat{p}_i^{-1}(K_i)$  celui de la triangulation induite sur  $\hat{M}_i$ . Puisque les inclusions  $K_i \subset M_i$  induisent des isomorphismes sur le  $\pi_1$ , l'isomorphisme  $\rho^{-1}: \pi_1 M_2 \rightarrow \pi_1 M_1$  induit un isomorphisme de  $\pi_1 K_2$  sur  $\pi_1 K_1$ , que nous pouvons représenter par une application  $g: K_2 \rightarrow K_1$ . Choisissons un relevé  $\hat{g}: \hat{K}_2 \rightarrow \hat{K}_1$ , et considérons  $\hat{f}_1 \circ \hat{g}: \hat{K}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

La différence  $\hat{f}_1 \circ \hat{g} - \hat{f}_2: \hat{K}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  est laissée invariante par les transformations du revêtement  $\hat{p}_2$ . Elle est donc bornée, et nous choisissons  $A > \|\hat{f}_1 \circ \hat{g} - \hat{f}_2\|_\infty$ . D'autre part, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de simplexes dans  $M_2$ , il existe un nombre  $B$  tel que  $|\hat{f}_2(x) - \hat{f}_2(y)| < B$  dès que  $x$  et  $y$  sont des points de  $\hat{M}_2$  appartenant au même simplexe.

Soit maintenant  $c \in \mathbb{R}$ , et fixons un point base  $x_2 \in \hat{K}_2$  tel que  $\hat{f}_2(x_2) < c - A - B$ . Soit  $e \in \pi_1(\hat{M}_2, x_2)$ . Puisque  $\omega_2$  est complète, nous pouvons représenter  $e$  par un lacet  $v_e$  (basé en  $x_2$ ) contenu dans  $\hat{f}_2^{-1}(]-\infty, c - A - B[)$ . Soit  $\hat{M}_2(e)$  l'union des simplexes qui rencontrent  $v_e$ . Alors  $v_e$  est homotope dans  $\hat{M}_2(e)$  à un lacet  $v'_e \subset \hat{K}_2$ . D'après le choix de  $A$  et  $B$ , on a  $v'_e \subset \hat{f}_2^{-1}(]-\infty, c - A[)$   $\subset (\hat{f}_1 \circ \hat{g})^{-1}(]-\infty, c[)$ .

Le lacet  $\hat{g}(v'_e)$ , basé en  $\hat{g}(x_2)$ , représente  $\hat{g}_*(e)$  et est contenu dans  $\hat{f}_1^{-1}(]-\infty, c[)$ . Puisque  $e$  était quelconque, nous voyons que  $\hat{f}_1^{-1}(]-\infty, c[)$  engendre  $\pi_1 \hat{M}_1$ . On montre de même que  $\hat{f}_1^{-1}(]c, +\infty[)$  engendre  $\pi_1 \hat{M}_1$ , et donc que  $\omega_1$  est complète.  $\square$

*Remarque.* Plus généralement, si  $\rho: \pi_1 M_1 \rightarrow \pi_1 M_2$  est un épimorphisme et si  $\Omega_1 = \rho^* \Omega_2$  est complète, alors  $\Omega_2$  est complète.

**Théorème V.6.** L'ensemble  $U(M) \subset H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  des classes complètes est un cône ouvert. Une classe rationnelle  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{Q}) - \{0\}$  est dans  $U(M)$  si et seulement si le noyau de  $\Omega: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{Q}$  est de type fini.

#### Démonstration

Il est clair que  $U(M)$  est un cône (i.e.  $\Omega \in U(M)$  et  $t \in \mathbb{R}^* \Rightarrow t\Omega \in U(M)$ ). D'autre part la deuxième assertion est simplement une reformulation du théorème V.2.

Il reste à voir que  $U(M)$  est ouvert. La raison essentielle en est que la propriété C2 (voir proposition II.2) est préservée par perturbation de  $\omega$  (cf.

I.7.3). Pour le lecteur que cet argument ne satisferait pas, nous procédons comme suit.

Soit  $\Omega_1, \dots, \Omega_q$  une base de  $H^1(M, \mathbb{Z})$ , et  $H_i = p_i^{-1}(c_i)$ , où  $p_i: M \rightarrow S^1$  représente  $\Omega_i$  et  $c_i \in S^1$  est une valeur régulière. On peut représenter chaque  $\Omega_i$  par une forme  $\omega_i$  qui est nulle en dehors d'un voisinage arbitrairement petit  $U_i$  de l'hypersurface  $H_i$ .

Soit  $\omega$  une forme complète de Morse sans centre. Supposons d'abord  $n \geq 5$ . Dans ce cas les lacets de connexion  $\gamma_j$  (homotopes à 0) associés aux singularités coniques  $s_j$  de  $\omega$  bordent des disques plongés disjoints  $D_j$ , et on peut par isotopie supposer que les  $\bar{U}_i$  sont disjoints des  $D_j$  et de  $\text{Sing } \omega$ .

Si les réels  $a_i$  sont assez proches de 0, la forme  $\omega + \sum_{i=1}^q a_i \omega_i$  a les mêmes singularités que  $\omega$ , et est donc complète (elle vérifie C2).

Pour le cas où  $n=3$  ou 4, nous utilisons le théorème V.5, qui identifie  $U(M)$  à  $U(M \times S^2)$ .  $\square$

Du théorème V.6 on déduit immédiatement un résultat de W. Neumann [Ne]:

**Corollaire V.7.** *Soit  $G$  un groupe de présentation finie. Dans  $\text{Hom}(G, \mathbb{Q}) - \{0\}$ , les homomorphismes dont le noyau est de type fini forment un ouvert.*  $\square$

*Remarques.* La topologie sur  $\text{Hom}(G, \mathbb{Q})$  est bien sûr celle de la convergence uniforme sur un système fini (quelconque) de générateurs.

En utilisant des formes non singulières, D. Fried et R. Lee ont montré qu'avoir un noyau de présentation finie est également une propriété ouverte [FrL].

**Corollaire V.8.** *Il existe sur  $M$  une forme complète si et seulement si il existe un épimorphisme de  $\pi_1 M$  dans  $\mathbb{Z}$  dont le noyau est de type fini.*  $\square$

*Remarque.* L'existence sur  $M$  d'une forme complète équivaut aussi à l'existence dans  $\pi_1 M$  d'un sous-groupe distingué de type fini, d'indice infini, et contenant  $\text{Ker } p_M$  (ou contenant simplement le sous-groupe des commutateurs). Elle implique que  $\text{Ker } p_M$  est l'intersection d'une famille finie de sous-groupes distingués de type fini, et que presque toute classe de cohomologie est faiblement complète.

Appelons  $U'(M)$  le cône ouvert des  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  tels que toute classe rationnelle assez proche de  $\Omega$  soit complète. D'après le théorème V.6 on a  $U(M) \subset U'(M)$ , et ces deux cônes ouverts contiennent exactement les mêmes points rationnels.

Malheureusement l'inclusion  $U(M) \subset U'(M)$  peut être stricte: on déduit de [BNS] (section 8) des exemples où  $U'(M) = H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$ , alors que  $H^1(M, \mathbb{R}) - U(M)$  se compose de deux droites ne contenant aucun point rationnel (à part 0). Il existe ainsi des variétés sur lesquelles certaines formes ne sont pas complètes bien que toute forme de rang 1 le soit.

Nous allons voir cependant qu'on a toujours  $U(M) = U'(M)$  si  $\pi_1 M$  est le groupe fondamental d'une variété de dimension 3. Cela résultera du théorème de

fibration de Stallings [St], et de la description due à Thurston ([Th1], [Fr]) du cône ouvert  $\mathcal{C}(N) \subset H^1(N^3, \mathbb{R}) - \{0\}$  formé des classes représentables par une forme non singulière sur une variété  $N^3$  irréductible (en fait  $\mathcal{C}(N) = U(N)$ , voir ci-dessous). Bien sûr toutes les variétés considérées ici sont fermées et orientables.

D'une façon générale, le théorème V.2 nous permet de représenter tout épimorphisme  $\pi: \pi_1 M^n \rightarrow \mathbb{Z}$  avec  $\text{Ker } \pi$  de type fini, par une application  $p: M \rightarrow S^1$  telle que pour tout  $c \in S^1$  l'image réciproque  $p^{-1}(c)$  soit connexe et engendre  $\text{Ker } \pi$  (i.e. la suite  $\pi_1(p^{-1}(c)) \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}$  est exacte).

Malheureusement nous ne pouvons pas en général espérer que l'application  $\pi_1(p^{-1}(c)) \rightarrow \pi_1 M$  soit injective, car par exemple  $\text{Ker } \pi$  n'a aucune raison d'être de présentation finie.

La situation est bien meilleure si  $M$  est une variété irréductible de dimension 3; dans ce cas le théorème de Stallings dit que  $\pi$  est représentable par une fibration, ou en d'autres termes que toute forme complète de rang 1 est cohomologue à une forme non singulière.

Nous allons en fait déduire de la théorie de Thurston que le même résultat est vrai si le rang est  $> 1$ : sur toute variété  $N^3$  irréductible, on a  $\mathcal{C}(N) = U(N)$ : une forme est complète si et seulement si elle est cohomologue à une forme non singulière.

Thurston définit pour toute variété  $N^3$  irréductible une semi-norme sur  $H^1(N, \mathbb{R})$  (pour simplifier la discussion, nous supposons que c'est en fait une norme). La sphère unité de cette norme est un polyèdre à sommets rationnels, et Thurston montre que  $\mathcal{C}(N)$  est une union de cônes sur certaines faces ouvertes  $X_i$  (de dimension maximale) de ce polyèdre.

On en déduit que  $\mathcal{C}(N) = U(N)$ . Bien sûr  $\mathcal{C}(N) \subset U(N)$ . Si d'autre part  $\Omega \notin \mathcal{C}(N)$ , la structure de  $\mathcal{C}(N)$  impose l'existence arbitrairement près de  $\Omega$  de classes rationnelles qui ne sont pas dans  $\mathcal{C}(N)$ , donc pas dans  $U(N)$ ; ceci empêche  $\Omega$  d'être dans  $U(N)$ .

On a également  $U'(N) = U(N)$ : ceci résulte de la structure polyédrale de  $U(N) = \mathcal{C}(N)$ .

Si d'autre part  $M^3$  est une 3-variété quelconque, et si  $\pi_1 M$  n'est pas isomorphe à un  $\pi_1 N^3$ , avec  $N$  irréductible, alors ou bien  $U(M) = \emptyset$ , ou bien  $\pi_1 M \simeq \mathbb{Z}$  ([Hem], lemmes 10.1 et 11.2). On a donc toujours  $U(M) = U'(M)$  si  $M$  est de dimension 3.

### Exemple: formes complètes sur $M_1 \times M_2$

Considérons une variété produit  $M^n = M_1 \times M_2$ . Si  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$ ) est une forme de Morse sans centre sur  $M_1$  (resp.  $M_2$ ), alors  $\delta_1^* \omega_1 + \delta_2^* \omega_2$  est une forme de Morse sur  $M$  dont toutes les singularités ont un indice compris entre 2 et  $n-2$  ( $\delta_i$  est bien sûr la projection de  $M$  sur  $M_i$ ); c'est donc une forme complète.

Cette remarque montre le fait suivant, qui est d'ailleurs vrai si  $G_1$  et  $G_2$  sont seulement de type fini: soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes de présentation finie, et  $\pi: G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  un homomorphisme; si ni  $\pi(G_1)$  ni  $\pi(G_2)$  n'est réduit à  $\{0\}$ , alors  $\text{Ker } \pi$  est de type fini.

On peut en fait déterminer complètement  $U(M_1 \times M_2)$  en fonction de  $U(M_1)$  et  $U(M_2)$ : les formes non complètes sur  $M_1 \times M_2$  sont exactement celles pour lesquelles  $\omega|_{M_1}$  est exacte et  $\omega|_{M_2}$  non complète, ou vice-versa. D'après le théorème V.5, cette description de  $U(M)$  se généralise à toute variété dont le  $\pi_1$  est un produit direct.

### Caractérisations algébriques de $U(M)$

Nous avons vu que  $U(M)$  ne dépend que de  $G = \pi_1 M$ . On peut en donner plusieurs définitions algébriques. Nous en esquissons trois ci-dessous.

a) Soit  $G' \subset G$  le sous-groupe des commutateurs. Étant donné un homomorphisme  $\Omega: G \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $G_\Omega \subset G$  le sous-monoïde formé des  $g$  tels que  $\Omega(g) \geq 0$ . On appelle  $\Sigma$  l'ensemble des homomorphismes non nuls  $\Omega: G \rightarrow \mathbb{R}$  possédant la propriété suivante: il existe un sous-groupe de type fini  $H \subset G'$ , et un sous-monoïde de type fini  $J \subset G_\Omega$ , tels que tout  $g \in G'$  soit un produit d'éléments de la forme  $j^{-1} h j$ , avec  $h \in H$  et  $j \in J$ .

On déduit alors de [BNS] (cf. [Si]) que  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  appartient à  $U(M)$  si et seulement si  $\Omega$  et  $-\Omega$  appartiennent à  $\Sigma$ .

b) À une présentation de  $G$  avec  $p$  générateurs et  $q$  relations est associée une suite exacte de  $\Lambda$ -modules  $\Lambda^q \rightarrow \Lambda^p \rightarrow \Lambda$ , où  $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$ . Étant donné  $\Omega: G \rightarrow \mathbb{R}$ , on appelle  $\Lambda_\Omega$  l'anneau des séries formelles  $\sum_g n_g \cdot g$  ( $g \in G$ ,  $n_g \in \mathbb{Z}$ ) telles que, pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , l'ensemble des  $g$  tels que  $n_g \neq 0$  et  $\Omega(g) > c$  soit fini.

On montre [Si] que  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  est dans  $U(M)$  si et seulement si les deux suites  $\Lambda_\Omega^q \rightarrow \Lambda_\Omega^p \rightarrow \Lambda_\Omega$  et  $\Lambda_{-\Omega}^q \rightarrow \Lambda_{-\Omega}^p \rightarrow \Lambda_{-\Omega}$  obtenues par extension des scalaires sont exactes.

c) D'après [Me],  $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  n'est pas dans  $U(M) \Leftrightarrow G$  a une infinité de bouts dans la direction  $\Omega$  ou dans la direction  $-\Omega$ . De façon explicite,  $\Omega$  n'est pas dans  $U(M)$  ssi il existe une partie  $Q \subset G$  telle que ni  $\Omega(Q)$  ni  $\Omega(G - Q)$  ne soit majoré (resp. minoré) dans  $\mathbb{R}$ , mais que  $\Omega(Q \Delta Q)$  soit majoré (resp. minoré) pour tout  $g \in G$  ( $\Delta$  est la différence symétrique).

Mentionnons pour finir deux résultats de [BNS]. Si  $\pi_1 M$  admet une présentation par  $p$  générateurs et  $q$  relations, avec  $q \leq p - 2$ , alors  $U(M) = \emptyset$ . Si par contre  $\pi_1 M$  ne contient pas de sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , et si  $b_1 M \geq 2$ , alors  $U(M) \neq \emptyset$ .

## VI. Généralisation

Le but de cette partie est d'étendre nos résultats aux formes de Morse pouvant posséder des centres, et plus généralement aux formes  $\omega$  dont le lieu singulier est de codimension  $\geq 3$ ; de façon précise, nous supposons que *Sing  $\omega$  est contenu dans une réunion finie de sous-variétés compactes de codimension au moins 3.*

Notons qu'alors  $\pi_1 M^*$  est isomorphe à  $\pi_1 M$ , et donc que  $N(\omega)$  (union des feuilles  $L$  telles que  $L \cup \text{Sing } \omega$  ne soit pas compact) est ouvert ([Ha], théorème p. 386). Nous notons  $N(\omega)/\omega$  l'espace des feuilles de  $N(\omega)$ .

*Remarque.* Certains de nos résultats sont probablement des cas particuliers de résultats valables pour les formes non singulières sur les variétés ouvertes (cf. [Im2], [Me]).

### VIa. Formes faiblement complètes

Dans la partie III nous avons caractérisé algébriquement les classes de cohomologie dans lesquelles toute forme de Morse sans centre est faiblement complète. Nous allons maintenant étudier les formes plus générales contenues dans ces classes.

**Théorème VI.1.** *Soit  $\omega$  une forme dont le lieu singulier est de codimension au moins 3. On suppose que  $\omega$  est de rang au moins 2, et que  $[\omega]: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$  ne se factorise pas de façon non triviale par un  $\mathbb{Z}^a * \mathbb{Z}^b$ . Alors l'ouvert  $N(\omega)$  est non vide, connexe, et l'espace des feuilles  $N(\omega)/\omega$  s'identifie à  $\mathbb{R}/P(\omega)$  (au sens de la proposition II.1).*

*Remarque.* Ce théorème peut être faux si  $\text{Sing } \omega$  est de codimension 2; il ne semble pas admettre de bonne généralisation au cas où  $r(\omega) \leq 1$ .

Si  $\omega$  est comme dans le théorème VI.1, le feuilletage induit sur  $N(\omega)$  est minimal et uniquement ergodique. En particulier toute feuille de  $\omega$  est fermée (dans  $M^*$ ) ou localement dense, c'est à dire que  $\omega$  n'a pas de feuille exceptionnelle. Nous obtenons donc:

**Corollaire VI.2.** *S'il n'y a pas d'homomorphisme surjectif de  $\pi_1 M$  dans  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , une forme sur  $M$  dont le lieu singulier est de codimension  $\geq 3$  n'a pas de feuille exceptionnelle.*

On ignore si une forme fermée sur une variété compacte peut avoir des feuilles exceptionnelles (cf. [Im1] et [Me]).

Faisons encore quelques remarques sur le théorème VI.1 avant de le démontrer.

Comme pour les formes de Morse sans centre, on peut exprimer la conclusion  $N(\omega)/\omega \sim \mathbb{R}/P(\omega)$  du théorème sous d'autres formes (cf. proposition II.1): tout chemin d'intégrale nulle à extrémités dans  $N(\omega)$  a ses extrémités sur la même feuille; dans  $\hat{M}$ , tous les niveaux  $\hat{f}^{-1}(c) \cap \hat{p}^{-1}(N(\omega))$  sont connexes; il existe une courbe fermée transverse  $C \subset N(\omega)$  coupant toute feuille de  $N(\omega)$ , telle que deux points quelconques de  $C$  dont la distance est une période soient sur la même feuille.

Les formes  $\omega$  du théorème VI.1 méritent d'être appelées faiblement complètes; en effet elles possèdent les deux propriétés suivantes, que nous prenons comme *définition générale des formes faiblement complètes* (de rang  $\geq 2$ ):

- si  $L$  est une feuille avec  $L \cup \text{Sing } \omega$  compact, alors  $\bar{L}$  sépare  $M$  en deux composantes, et  $\omega$  est exacte dans l'une d'elles;
- $N(\omega)/\omega \sim \mathbb{R}/P(\omega)$ .

Bien sûr cette définition coïncide avec celle de la partie II pour les formes de Morse sans centre. Intuitivement, une forme faiblement complète se compo-

se d'un noyau  $N(\omega)$  dans lequel tout se passe comme pour une forme de Morse sans centre faiblement complète, et d'appendices de feuilles fermées greffés sur ce noyau.

#### Démonstration du théorème VI.1

Quitte à considérer  $M \times S^2$  au lieu de  $M$ , nous pouvons supposer  $n \geq 5$ . L'hypothèse sur  $\text{Sing } \omega$  nous permet de trianguler  $M$  de façon que le 2-squelette soit disjoint de  $\text{Sing } \omega$ . Le bord d'un voisinage régulier de ce 2-squelette fournit alors une sous-variété  $V^{n-1} \subset M^n$ , disjointe de  $\text{Sing } \omega$ , telle que l'inclusion induise un isomorphisme  $\pi_1 V \simeq \pi_1 M$  (c'est ici que nous utilisons  $n \geq 5$ ).

En bougeant un peu  $V$  nous pouvons supposer que  $\omega$  induit sur  $V$  une forme de Morse  $\omega'$  (pouvant avoir des centres) dont les singularités sont sur des feuilles distinctes de  $\omega$ .

L'hypothèse de non-factorisation faite sur  $[\omega]$  entraîne qu'il n'existe pas dans  $V$  de sous-variété  $[\omega']$ -exacte non triviale (au sens de la partie III); on en déduit que  $N(\omega')$  est non vide, connexe, et que toute période est l'intégrale de  $\omega'$  sur un lacet contenu dans  $N(\omega')$ .

Soit  $C \subset N(\omega')$  une courbe transverse, et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M - \text{Sing } \omega$  tel que  $\omega(X) \equiv 1$  et que  $C$  soit une orbite. Puisque  $V$  est compact, il existe  $\tau > 0$  tel que le flot  $\phi_t(x)$  de  $X$  soit défini pour tout  $x \in V$  et  $t \in [0, \tau]$ .

Ceci nous permet d'appliquer le lemme III.5, en prenant pour  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  les pseudogroupes d'holonomie induits sur  $C$  par  $\omega$  et  $\omega'$  respectivement; comme  $\omega'$  est de Morse, nous savons que  $N(\omega')$  est une composante minimale (cf. I.3) et donc que  $\Gamma'$  agit minimalement.

Comme toute période est représentée dans  $N(\omega')$ , on en déduit  $W/\omega \sim \mathbb{R}/P(\omega)$ , où  $W$  est le saturé de  $C$  pour  $\omega$ . Il ne nous reste donc plus qu'à montrer  $W = N(\omega)$ , c'est à dire que toute feuille de  $N(\omega)$  coupe  $C$ .

C'est certainement vrai si  $\omega$  est de Morse: en effet dans ce cas nous savons que  $N(\omega)$  est connexe et que toute feuille contenue dans  $N(\omega)$  y est dense. Nous avons donc montré le théorème pour les formes de Morse.

Dans le cas général, supposons qu'il existe dans  $N(\omega)$  une feuille  $L$  disjointe de  $C$ , et choisissons un relevé  $\hat{L}$  de  $L$  dans  $\hat{M}$ . Dans le niveau  $\hat{f}^{-1}(c) \cap M^*$  qui contient  $\hat{L}$ , il existe une composante  $\hat{L}'$  (en fait unique) dont la projection  $L'$  rencontre  $C$ .

Puisque  $L$  et  $L'$  sont coupées par des transversales fermées, les feuilles  $\hat{L}$  et  $\hat{L}'$  adhèrent à des composantes de  $\hat{M}_{-\infty, c}$  (resp.  $\hat{M}_{c, +\infty}$ ) sur lesquelles  $\hat{f}$  n'est pas bornée.

Compte tenu du lemme IV.4, on en déduit comme dans la démonstration de la proposition IV.1 que  $\mathcal{L}(\omega)$  est strictement contenu dans  $\text{Ker}[\omega]$ ; puisque  $\text{codim } \text{Sing } \omega \geq 3$ , deux lacets de  $\hat{M}^*$  homotopes dans  $\hat{M}$  ont le même nombre d'intersection algébrique avec  $\hat{L}$  ou  $\hat{L}'$ .

Nous sommes ainsi ramenés à montrer le résultat suivant:

**Lemme VI.3.** Si  $\omega$  est comme dans le théorème VI.1, on a  $\mathcal{L}(\omega) = \text{Ker}[\omega]$ .



*Démonstration*

Reprenons  $V$  et  $\omega'$  comme ci-dessus. Puisque  $\mathcal{L}(\omega') \subset \mathcal{L}(\omega)$ , il nous suffit de montrer le résultat pour  $\omega'$ .

Les feuilles non compactes  $L$  de  $\omega'$  telles que  $L \cup \text{Sing } \omega'$  soit compact sont en nombre fini. Leur union avec  $\text{Sing } \omega'$  est un compact  $K$ , et les composantes de  $V - K$  autres que  $N(\omega')$  sont feuilletées comme un produit (feuille compacte  $\times$  intervalle ouvert).

Si  $L$  est une feuille contenue dans  $K$ ,  $\bar{L}$  sépare  $V$  en deux composantes et  $\omega'$  est exacte dans l'une d'elles (car il n'y a pas de sous-variété  $[\omega']$ -exacte non triviale). On peut donc représenter tout élément de  $\text{Ker}[\omega']$  par un produit fini de lacets d'intégrale nulle  $v_i$  librement homotopes à des lacets  $v'_i \subset V - K$ .

Les  $v'_i$  qui ne sont pas dans  $N(\omega')$  représentent évidemment des éléments de  $\mathcal{L}(\omega')$ . Il en est de même pour les  $v'_i$  contenus dans  $N(\omega')$ : en effet nous savons que  $N(\omega')/\omega'$  s'identifie à  $\mathbb{R}/P(\omega')$ , car le théorème VI.1 est montré pour les formes de Morse; il nous suffit alors d'appliquer à  $v'_i$  les opérations décrites dans la démonstration du lemme II.3, en remarquant qu'elles ne font pas sortir de  $N(\omega')$ . Finalement on a bien  $\text{Ker}[\omega'] \subset \mathcal{L}(\omega')$ .  $\square$

**VIb. Formes complètes**

Nous avons étudié dans la section V le cône ouvert  $U(M) \subset H^1(M, \mathbb{R}) - \{0\}$  des classes de cohomologie complètes, et nous avons caractérisé géométriquement les formes de Morse sans centre dont la classe est complète (propositions II.2 et IV.6). Nous étendons maintenant ces caractérisations aux formes à singularités quelconques.

**Théorème VI.4.** *Soit  $\omega$  une forme de rang  $\geq 2$  dont le lieu singulier est de codimension  $\geq 3$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *La classe de cohomologie  $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$  est complète.*
- 2) *Il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que, pour chacun des ouverts  $\hat{M}_{-\infty, c}$  et  $\hat{M}_{c, +\infty}$ , la composante (unique) sur laquelle  $\hat{f}$  n'est pas bornée engendre  $\pi_1 \hat{M}$  (c'est alors vrai  $\forall c$ ).*
- 3)  *$N(\omega)$  n'est pas vide, et tout chemin d'intégrale nulle à extrémités dans  $N(\omega)$  est homotope à un chemin contenu dans une feuille.*
- 4)  *$N(\omega)$  n'est pas vide, et sur le revêtement universel  $\tilde{M}$  on a  $\tilde{f}^{-1}(c) \cap \tilde{p}^{-1}(N(\omega))$  connexe pour tout  $c \in \mathbb{R}$ .*
- 5) *Il existe une feuille  $L \subset N(\omega)$  telle que la suite  $\pi_1 L \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{[\omega]} \mathbb{R}$  soit exacte.*
- 6)  *$N(\omega)$  n'est pas vide, et pour toute feuille  $L \subset N(\omega)$  la suite  $\pi_1 L \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{[\omega]} \mathbb{R}$  est exacte.*

*Démonstration*

On a clairement  $3 \Leftrightarrow 4$ ,  $3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2$ , et  $1 \Leftrightarrow 2$  (d'après la proposition IV.6). Pour conclure, supposons que  $\omega$  vérifie 2. Nous savons, par le théorème VI.1,

que  $N(\omega)$  est non vide, connexe, et que  $N(\omega)/\omega \sim \mathbb{R}/P(\omega)$ . Ceci permet de montrer successivement que  $\omega$  vérifie 6 et 3, comme dans la démonstration de  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$  dans la proposition IV.6.  $\square$

*Remarque.* On déduit de  $1 \Rightarrow 5$  que, si  $[\omega]$  est complète, alors  $N(\omega)$  engendre  $\pi_1 M$ .

## Bibliographie

- [AL] Arnoux, P., Levitt, G.: Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières. *Invent. Math.* **84**, 141–156 (1986)
- [BL] Blank, S., Laudenbach, F.: Isotopie de formes fermées en dimension trois. *Invent. Math.* **54**, 103–177 (1979)
- [BNS] Bieri, R., Neumann, W., Strebel, R.: A geometric invariant for discrete groups. Preprint
- [FLP] Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V.: Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque* **66–67** (1979), SMF Paris
- [Fr] Fried, D.: Fibrations over  $S^1$  with pseudo-Anosov monodromy. Exposé 14 de [FLP]
- [FrL] Fried, D., Lee, R.: Realizing group automorphisms, in *Group actions on manifolds*. *Contemp. Math.* **36**, 427–432 (1985)
- [Ha] Haefliger, A.: Variétés feuilletées. *Ann. Sci. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.* **16**, 367–397 (1962)
- [Hem] Hempel, J.: 3-manifolds. *Ann. Math. Stud.* **86** (1976) Princeton Univ. press
- [Hen] Henč, D.: Ergodicity of foliations with singularities. Preprint IHES 1982
- [Im1] Imanishi, H.: On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities. *J. Math. Kyoto Univ.* **19**, 285–291 (1979)
- [Im2] Imanishi, H.: Structure of codimension 1 foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group. *J. Math. Kyoto Univ.* **19**, 481–495 (1979)
- [Im3] Imanishi, H.: Denjoy-Siegel theory of codimension one foliations. *Sûgaku* **32**, 119–132 (1980) (en japonais). MR 82k:57017
- [Le] Levitt, G.: Geometry and ergodicity of singular closed 1-forms. *Proc. V Escola Geom. Dif., São Paulo 1984*, 109–118
- [Me] Meigniez, G.: Bouts d'un groupe dans une direction et feuilletages par 1-formes fermées (preprint)
- [Mo] Moser, J.: On the volume elements on a manifold. *Trans. Am. Math. Soc.* **120**, 286–294 (1965)
- [Ne] Neumann, W.: Normal subgroups with infinite cyclic quotient. *Math. Sci.* **4**, 143–148 (1979)
- [QR] Que, N., Roussarie, R.: Sur l'isotopie des formes fermées en dimension 3. *Invent. Math.* **64**, 69–87 (1981)
- [Ro] Rosenberg, H.: Foliation by planes. *Topology* **7**, 131–138 (1968)
- [Si] Sikorav, J.C.: Thèse d'État, Orsay 1987
- [St] Stallings, J.: On fibering certain 3-manifolds, *Topology of 3-manifolds and related topics*. Prentice Hall 1961, 95–100
- [Th1] Thurston, W.: A norm for the homology of 3-manifolds. *Mem. Am. Math. Soc.* **339**, 99–130 (1986)
- [Th2] Thurston, W.: The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton University notes
- [Ti] Tischler, D.: On fibering certain foliated manifolds over  $S^1$ . *Topology* **9**, 153–154 (1970)