TOPOLOGIE. — *Sur les mesures transverses invariantes d'un feuilletage de codimension* 1. Note (*) de **Gilbert Levitt,** présentée par Henri Cartan.

Étant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement orienté de codimension 1 sur une variété compacte sans bord M, on montre que deux mesures transverses invariantes qui déterminent la même classe de cohomologie dans $H^1(M, \mathbb{R})$ ne peuvent différer que sur les feuilles compactes de $\mathcal{F}$.

Given a transversely oriented codimension 1 *foliation on a closed manifold* M, *it is shown that two invariant transverse measures which define the same cohomology class in* $H^1(M, \mathbb{R})$ *can only differ on compact leaves.*

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orienté de codimension 1 d'une variété compacte sans bord M^n. A toute mesure transverse invariante μ de $\mathcal{F}$ on peut associer une classe de cohomologie $\Phi(\mu)$ (*voir* par exemple [4]), et définir ainsi une application Φ de l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures transverses de $\mathcal{F}$ dans $H^1(M, R)$. Le but de cette Note est d'étudier cette application, en particulier de déterminer dans quelle mesure elle est injective.

THÉORÈME 1. — *Si deux mesures* μ *et* μ' *ont la même classe de cohomologie* $\Phi(\mu)=\Phi(\mu')$, *il existe deux mesures* μ_c *et* μ'_c *dont les supports ne contiennent que des feuilles compactes, telles que* $\mu+\mu_c=\mu'+\mu'_c$. *En particulier, l'application* Φ *est injective dès que* $\mathcal{F}$ *ne possède pas de feuille compacte.*

Appelons $\mathcal{M}_c$ l'ensemble des mesures compactes de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire celles dont le support ne contient que des feuilles compactes, et $\mathcal{M}_a$ l'ensemble des mesures anticompactes, c'est-à-dire celles dont le support ne contient aucune feuille compacte. Toute mesure s'écrit de façon unique comme somme d'une mesure compacte et d'une mesure anticompacte ([4], prop. 8.5). Le théorème 1 s'exprime de façon équivalente par :

THÉORÈME 1'. — *La restriction de* Φ *à* $\mathcal{M}_a$ *est injective; l'intersection des sous-espaces vectoriels de* $H^1(M, \mathbb{R})$ *engendrés respectivement par les images de* $\mathcal{M}_a$ *et de* $\mathcal{M}_c$ *est réduite à* 0.

Le seul défaut d'injectivité de l'application Φ provient donc de l'existence de feuilles compactes de $\mathcal{F}$. Lorsque M est orientée, l'application Φ est injective si et seulement si, pour toute famille non vide de feuilles compactes $L_1, \ldots, L_h, L'_1, \ldots, L'_k$ (avec $L_i \neq L'_j$ pour $1 \leqq i \leqq h$, $1 \leqq j \leqq k$), on a $L_1+\ldots+L_h \neq L'_1+\ldots+L'_k$ dans $H_{n-1}(M, Z)$ [parce que M est orientée et $\mathcal{F}$ transversalement orienté, chaque feuille compacte de $\mathcal{F}$ acquiert une orientation et donc définit un élément de $H_{n-1}(M, \mathbb{Z})$]. En particulier la présence d'une feuille compacte séparante ou d'une infinité de feuilles compactes empêche l'application Φ d'être injective.

Du théorème 1' on déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Le feuilletage* $\mathcal{F}$ *possède un nombre fini de mesures transverses ergodiques (à proportionnalité près) si et seulement s'il possède un nombre fini de feuilles compactes.*

Lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage singulier d'une surface dont les singularités sont des selles, on peut démontrer des résultats analogues aux théorèmes 1 et 1' et au corollaire [3]. Cela avait été fait par Katok ([2], prop. 3 et th. 1) dans le cas particulier où les feuilles régulières de $\mathcal{F}$ sont localement denses, et la présente Note est née du désir de généraliser le résultat de Katok.

Le reste de ce texte est consacré à la démonstration du théorème 1'.

La démonstration est particulièrement simple si l'on suppose que $\mathcal{F}$ est de classe C^2. En effet dans ce cas l'existence d'une mesure anticompacte non triviale entraîne que toute feuille est dense ([4], démonstration de la proposition 8.5 et remarque qui la suit). Si μ et μ' sont deux mesures telles que $\Phi(\mu)=\Phi(\mu')$, elles coïncident sur tout intervalle transverse à $\mathcal{F}$ dont les extrémités appartiennent à la même feuille, et parce que les feuilles sont denses on en déduit l'égalité cherchée $\mu=\mu'$.

Traitons maintenant le cas général. Si c est un chemin (orienté) tracé dans M et μ une mesure transverse de $\mathcal{F}$ (pour simplifier, nous supposons μ anticompacte), on peut définir un nombre $(\mu)(c)$ de la façon suivante : le chemin c est homotope à extrémités fixes à un chemin $a_1 \star b_1 \star \ldots \star a_m \star b_m$, où les a_i sont des arcs transverses à $\mathcal{F}$ et les b_j sont contenus dans des feuilles de $\mathcal{F}$, et on pose $(\mu)(c)=\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \mu(a_i)$, où ε_i vaut $+1$ ou -1 selon que l'orientation induite sur a_i par celle de c coïncide ou non avec l'orientation transverse de $\mathcal{F}$. Le nombre $(\mu)(c)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de c à extrémité fixes; si c est un lacet, $(\mu)(c)$ n'est autre que l'évaluation sur le lacet c de la classe de cohomologie $\Phi(\mu)$.

Soit U l'union des feuilles non compactes de $\mathcal{F}$; on sait ([1], [5]) que c'est un ouvert de M. Pour prouver simultanément les deux assertions du théorème 1', il suffit de montrer que, si μ et μ' sont deux mesures anticompactes telles que les classes $\Phi(\mu)$ et $\Phi(\mu')$ coïncident sur les éléments de $H_1(M, Z)$ représentables par des courbes fermées contenues dans U, alors on a $(\mu)(c)=(\mu')(c)$ pour tout chemin c contenu dans U.

Soient donc μ et μ' deux mesures anticompactes vérifiant cette condition cohomologique, et soit V une composante connexe de U. Nous dirons que deux points x et y de V sont équivalents s'il existe un chemin c joignant x à y dans V tel que $(\mu)(c)=(\mu')(c)$. On définit ainsi une relation d'équivalence dans V, et à cause de la condition cohomologique sur μ et μ' on a $(\mu)(c)=(\mu')(c)$ pour tout chemin c joignant dans V deux points équivalents. Le théorème se ramène donc à montrer que deux points quelconques de V sont équivalents.

On remarque d'abord que toute classe d'équivalence est saturée pour $\mathcal{F}$, fermée (dans V), et que sa frontière dans V est contenue dans l'union S des supports de μ et de μ'. Donc, s'il y a plus d'une classe d'équivalence, toute classe $\mathcal{C}_i$ contient un ensemble minimal exceptionnel K_i de $\mathcal{F}$ contenu dans S. D'après le théorème 6.3 de [4], toute feuille contenue dans S a une croissance polynomiale, et par conséquent, d'après le théorème 4.1 de [4], il existe pour tout i une mesure transverse de $\mathcal{F}$ dont le support est égal à K_i. Les résultats de la section 8 de [4] entraînent alors qu'il n'existe qu'un nombre fini de K_i, donc qu'un nombre fini de classes d'équivalence. Les classes étant fermées, il n'y a en fait qu'une seule classe.

C.Q.F.D.

William Goldman et Morris Hirsch m'ont aidé et encouragé durant la préparation de ce travail.

(*) Remise le 23 juin 1980.

[1] A. Haefliger, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, 16, 1962, p. 367-397.
[2] A. B. Katok, *Soviet Math. Dokl.*, 14, n° 4, 1973, p. 1104-1108.
[3] G. Levitt, *Feuilletages des surfaces* (preprint).
[4] J. F. Plante, *Ann. of Math.*, 102, 1975, p. 327-361.
[5] W. P. Thurston, *Foliations of 3-Manifolds which are Circle Bundles* (*Thesis*, Berkeley, 1972).

Université de Paris-VII,
75005 *Paris.*