

## CLASSES D'HOMOTOPIE DE SURFACES AVEC REBROUSSEMENTS ET QUEUES D'ARONDE DANS $\mathbb{R}^3$

RÉMI LANGEVIN, GILBERT LEVITT ET HAROLD ROSENBERG

RÉSUMÉ. We consider surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with generic wave front singularities, called *A-mersions* (*A* for Arnold who classified these singularities). we classify *A-mersions* up to generic homotopy. For the sphere they are classified by the degree of the Gauss map, and for higher genus surfaces the degree of the Gauss map and the number of zig-zags classify the *A-mersion*.

**Introduction.** Considérons dans  $\mathbb{R}^3$  un corps convexe de bord lisse  $S$ . Les surfaces parallèles à  $S$ , en partant vers l'intérieur, permettent de retourner le convexe, c'est-à-dire d'homotoper  $S$  à un convexe d'orientation transverse opposée (voir sur la figure 1 un dessin en dimension 2).

Bien sûr les surfaces intermédiaires présenteront des singularités. Arnold [Ar1, Ar2] donne la liste des singularités génériques de telles familles de surfaces dans  $\mathbb{R}^3$  (fronts d'onde). En particulier, sauf pour un nombre fini de valeurs du paramètre, ces surfaces n'ont comme singularités que des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde (voir figure 2); Arnold explicite de plus les 5 transitions possibles (voir figure 3).

Notons que chacune de ces surfaces est l'enveloppe d'une famille lisse de plans; en particulier elle admet en tout point un plan tangent.

Plus généralement, nous appellerons *A-mersion* une application d'une surface dans  $\mathbb{R}^3$  qui est une immersion ne présentant comme singularités que les singularités génériques d'Arnold (arêtes de rebroussement et queues d'aronde).

Une *A-homotopie* entre deux *A-mersions*  $f_0$  et  $f_1$  est un chemin  $f_t$  qui ne sort de l'espace des *A-mersions* qu'en un nombre fini de valeurs de  $t$  près desquelles se produit une des 5 transitions de la liste d'Arnold.

Nous classons ici à *A-homotopie* près les *A-mersions* d'une surface fermée orientable  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Par exemple les *A-mersions* de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont classées par le degré  $d$  de leur application de Gauss (voir modèles sur figure 4, et partie I).

En genre plus grand (voir partie II), il faudra faire intervenir un autre invariant entier  $k$  (nombre de zigzags), défini à partir des arêtes de rebroussement. Par exemple, la figure 5 montre un tore de révolution *A-mergé* non *A-homotope* au tore standard (avec  $k = 2$ ); cette *A-mersion* n'est pas simplifiable, en ce sens que toute *A-mersion* qui lui est *A-homotope* possède au moins 4 arêtes de rebroussement.

---

Reçu par les éditeurs le 7 juillet 1992; révisée 25 juillet 1994.

Classification (AMS) par sujet : 51H99.

© Société mathématique du Canada 1995.

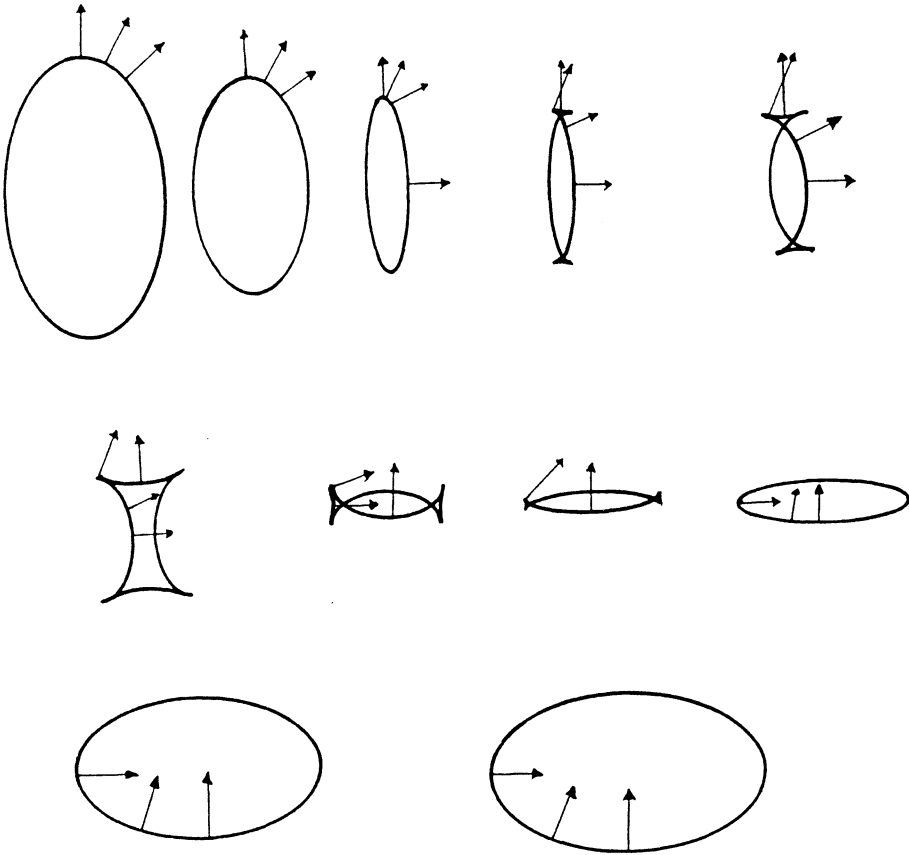


FIGURE 1

Une  $A$ -mersion de  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  apparaît comme un *front d'onde générique* si on la considère comme projection d'une immersion legendrienne générique de  $M$  dans  $PT^*\mathbb{R}^3$  (projectifié du fibré cotangent, muni de sa structure de contact canonique). Dans ce contexte, la classification des  $A$ -mersions à  $A$ -homotopie près équivaut à celle des immersions legendriennes à homotopie régulière près, que traite la théorie de Gromov [Gr1, Gr2]. Nous esquisserons dans la partie III le lien entre les deux points de vue.

Les invariants  $d$  et  $k$ , que nous exprimerons ou définirons en fonction des singularités de l' $A$ -mersion, apparaissent ainsi comme une interprétation concrète et combinatoire des invariants homotopiques provenant de la théorie de Gromov. Ils permettent par exemple d'obtenir des minoration du nombre de singularités d'une  $A$ -mersion en fonction de sa classe d' $A$ -homotopie (voir théorèmes 2 et 2').

D'autre part notre approche introduit une technique géométrique d'élimination des singularités, et par ailleurs n'utilise que la classification des immersions de  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est en fait concevable, au moins pour la sphère, que nous puissions nous passer du théorème de Smale. En effet, deux immersions de  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont toujours joignables

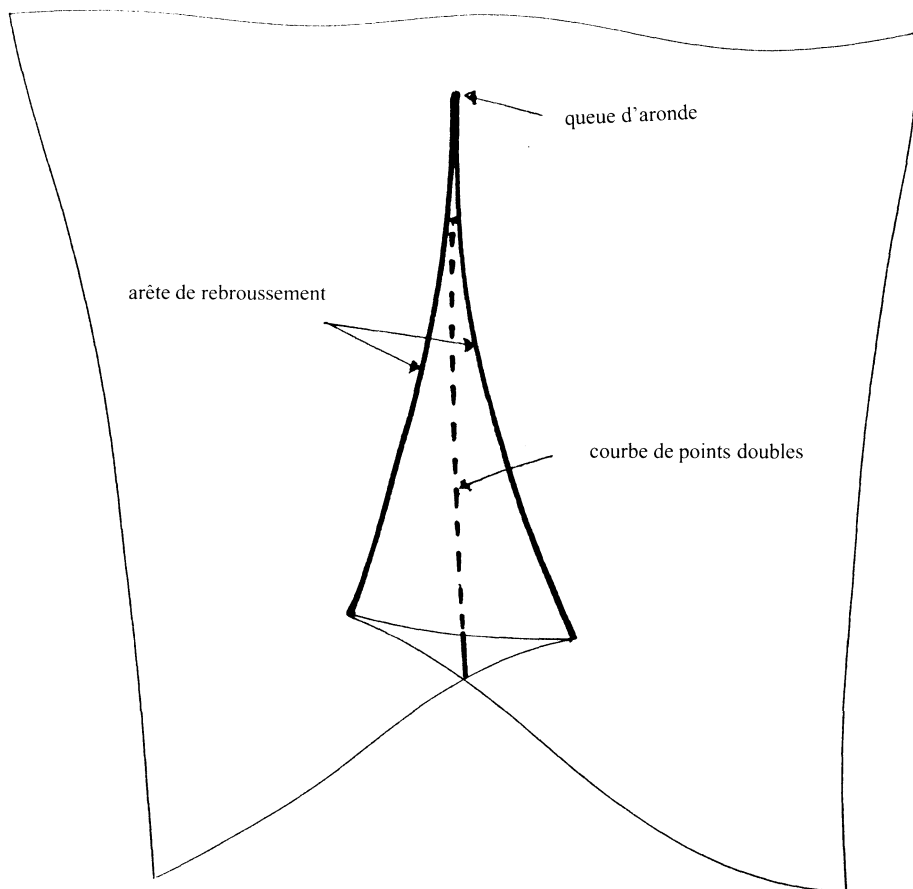


FIGURE 2

par un chemin générique d'applications  $C^\infty$ , que l'on peut essayer de déformer en une  $A$ -homotopie. On notera à ce propos que la possibilité de retourner la sphère (une des conséquences les plus frappantes du théorème de Smale) est apparue clairement ci-dessus si on se permet une  $A$ -homotopie.

**1.  $A$ -mersions de la sphère.** Nous commençons par le cas où  $M$  est une sphère  $S$ . Etant donné une  $A$ -mersion  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on peut associer à tout  $x \in S$  la direction de droite normale à  $f(S)$  en  $f(x)$ . On obtient ainsi une application de Gauss  $n$  à valeurs dans  $\mathbb{P}^2$  (vu comme ensemble des directions de droites de  $\mathbb{R}^3$ ).

On définit alors le *degré*  $d_f \in \mathbb{N}$  de  $f$  comme la valeur absolue du degré d'un relèvement  $\hat{n}: S \rightarrow \mathbb{S}^2$  de  $n$ . C'est un invariant de  $A$ -homotopie, car deux  $A$ -mersions  $A$ -homotopes ont des applications de Gauss homotopes.

**THÉORÈME 1.** 1) Deux  $A$ -mersions  $f$  et  $g$  sont  $A$ -homotopes si et seulement si  $d_f =$

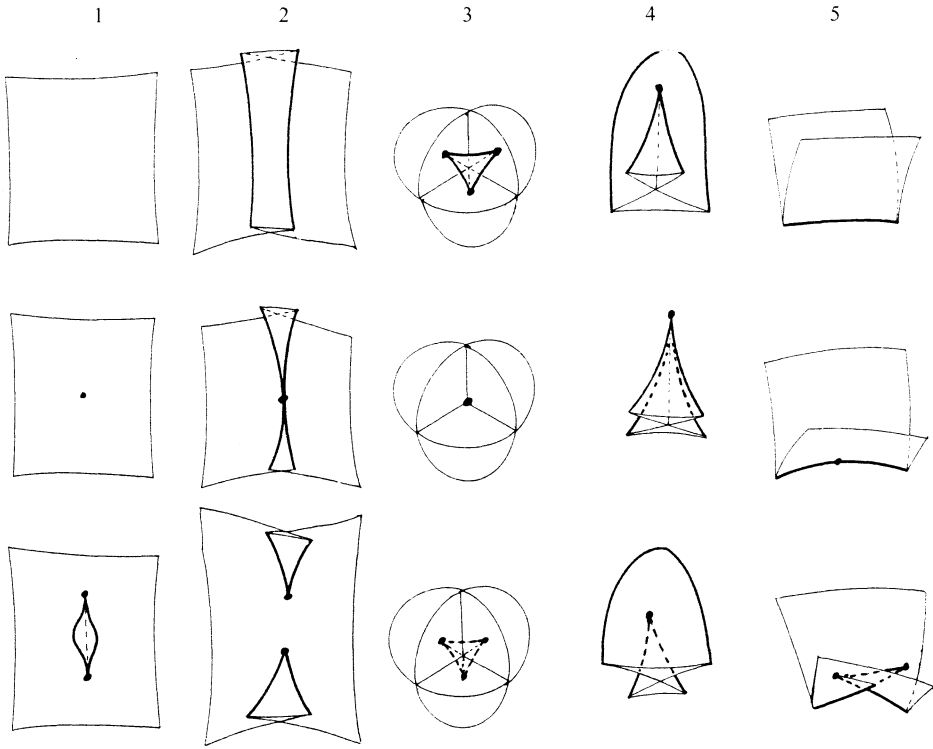


FIGURE 3 (D'APRÈS ARNOLD)

$d_g$ .

2) Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , il existe une  $A$ -mersion  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $d_f = d$  (voir figure 4).

Les  $A$ -mersions représentées sur la figure 4 ont comme singularités des arêtes de rebroussement, mais pas de queues d'aronde. Donc:

**COROLLAIRE.** Toute  $A$ -mersion  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  est  $A$ -homotope à une  $A$ -mersion sans queue d'aronde.

L'ensemble des points singuliers  $\text{Sing } f \subset S$  d'une  $A$ -mersion  $f$  est la réunion d'un nombre fini  $a_f$  de courbes fermées simples disjointes. Sur ces courbes un nombre fini  $q_f$  de points correspondent à des queues d'aronde (on montre que  $q_f$  est pair, car de chaque queue d'aronde part une courbe de points doubles).

**THÉORÈME 2.** Si l' $A$ -mersion  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  n'est pas une immersion (en particulier si  $d_f \neq 1$ ), on a  $a_f + \frac{1}{2}q_f \geq d_f + 1$ .

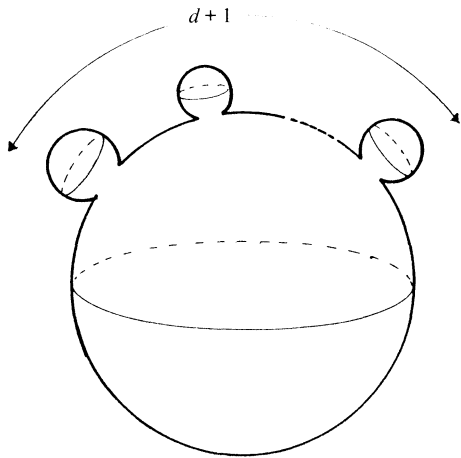


FIGURE 4

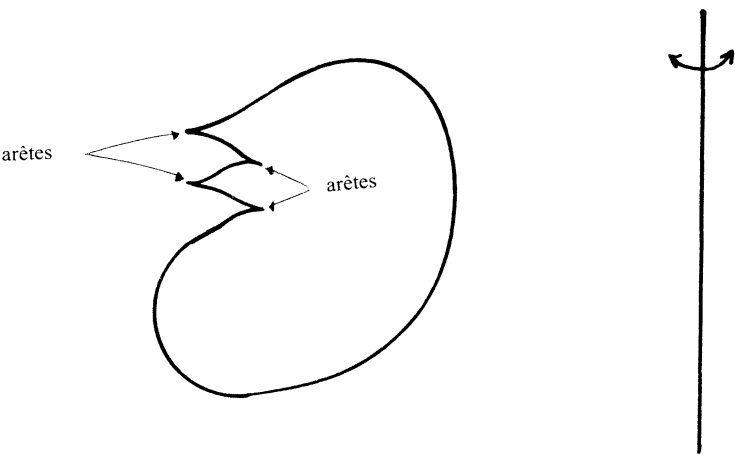


FIGURE 5

1.1 *Le 1-complexe associé à une A-mersion.* Soit  $M$  une surface fermée orientée, et  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  une  $A$ -mersion. L'ensemble  $K(f) \subset M$  des points en lesquels  $Df$  n'est pas de rang 2 est une réunion finie de courbes fermées simples lisses disjointes, que nous appellerons arêtes de  $K(f)$ .

La restriction de  $f$  à une arête est une immersion, sauf en un nombre fini de points où l'arête a un rebroussement (voir figure 6). Ces points correspondent aux queues d'aronde de  $f(M)$  et seront appelés les queues d'aronde de  $K(f)$ . Un argument standard, basé sur la remarque que de chaque queue d'aronde de  $f(M)$  part une courbe de points doubles, montre que  $K(f)$  a un nombre pair de queues d'aronde.

Au voisinage d'une queue d'aronde de  $K(f)$ , les deux côtés de l'arête ne jouent pas le

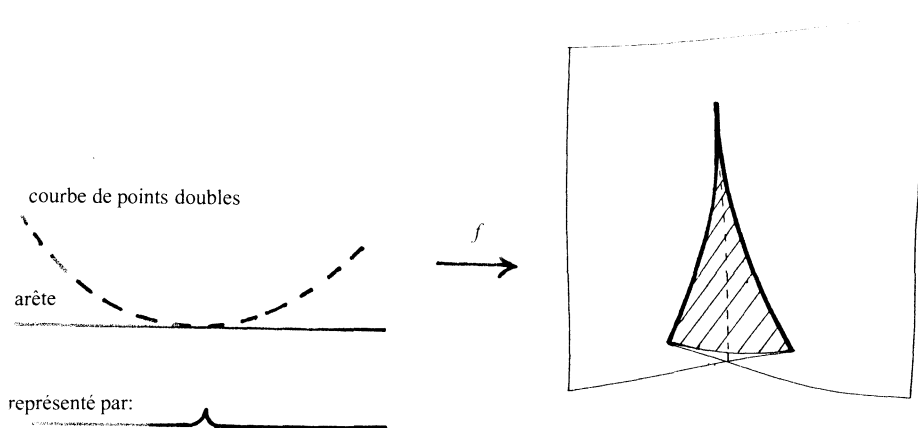


FIGURE 6

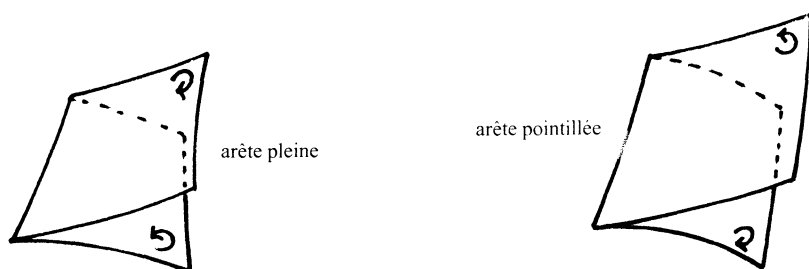


FIGURE 7

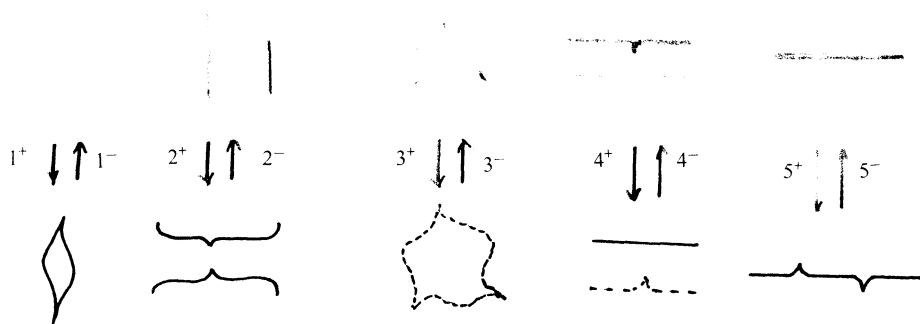


FIGURE 8

même rôle: l'un (hachuré sur la figure 6) s'envoie injectivement dans  $\mathbb{R}^3$ , l'autre contient les courbes de points doubles. Nous représenterons cette information graphiquement par une indentation sur l'arête (voir figure 6).

Fixons une fois pour toutes une orientation de  $\mathbb{R}^3$ . L'orientation de  $M$ , transportée aux parties lisses de  $f(M)$ , permet alors (par une règle de "tire-bouchon") de distinguer deux types d'arêtes (voir figure 7), que nous appellerons (et dessinerons) respectivement *plein*

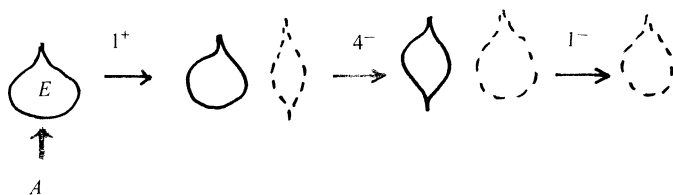


FIGURE 9



FIGURE 10

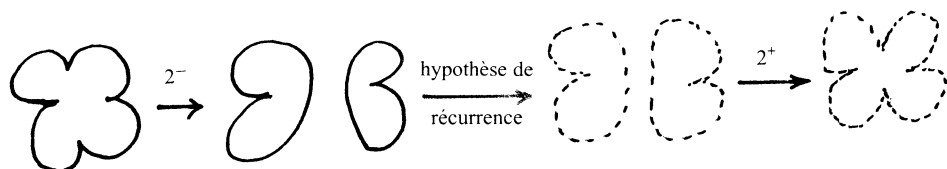


FIGURE 11

et *pointillé*. Notons que le type d'une arête est le même de part et d'autre d'une queue d'aronde.

Nous avons donc associé à  $f$  un ensemble  $K(f) \subset M$ . Il se compose de courbes fermées simples disjointes (arêtes), chacune étant soit pleine soit pointillée. Sur  $K(f)$  se trouvent des points particuliers (queues d'aronde), en nombre pair. De plus, au voisinage de chaque queue d'aronde, les deux côtés de l'arête sont distingués (indentation).

Nous appellerons  $K(f)$ , muni de toute cette information, le *1-complexe associé à  $f$* . Lorsque nous parlerons de 1-complexe, nous voudrions toujours dire un ensemble  $K$  comme ci-dessus.

Lorsqu'on effectue sur  $f$  une des 5 opérations d'Arnold,  $K(f)$  se modifie comme indiqué sur la figure 8. Les opérations 1 et 5 portent sur une arête, qui peut être soit pleine soit pointillée; l'opération 2 se fait entre arêtes du même type (pleines ou pointillées); l'opération 4 se fait entre arêtes de types opposés; quant à l'opération 3, nous ne l'utilisons en fait pas, car on peut l'obtenir en combinant les quatre autres.

Nous dirons que deux 1-complexes  $K$  et  $K'$  sont *A-équivalents* si l'on peut passer de l'un à l'autre en combinant isotopies et opérations 1, 2, 4, 5 de la figure 8.

**1.2 Démonstration du théorème 1.** Appelons  $f_d: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'*A*-mersion représentée sur la figure 4, obtenue en rajoutant  $d + 1$  verrues au plongement standard. Elle est de degré  $d$ , et le 1-complexe  $K_d = K(f_d)$  se compose de  $d + 1$  arêtes pleines bordant des disques disjoints.

Nous allons montrer que toute *A*-mersion  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  est *A*-homotope à une  $f_d$ ; le théorème 1 en résultera immédiatement, puisque nécessairement  $d = d_f$ . L'idée est

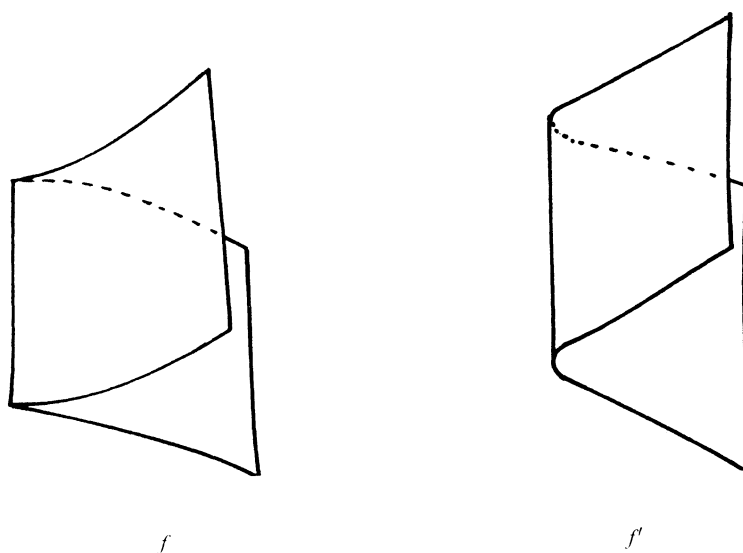


FIGURE 12

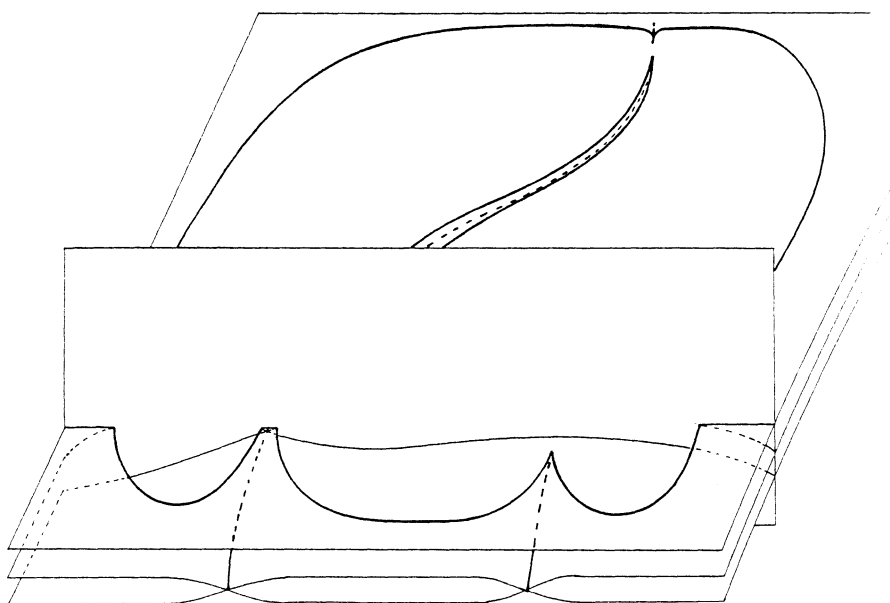


FIGURE 13

que, pour comprendre une  $A$ -mersion à  $A$ -homotopie près, il suffit de comprendre son 1-complexe à  $A$ -équivalence près. De façon précise, nous allons montrer:

PROPOSITION 3. Soit  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  une  $A$ -mersion.

a)  $K(f)$  est  $A$ -équivalent à un  $K_d$ .



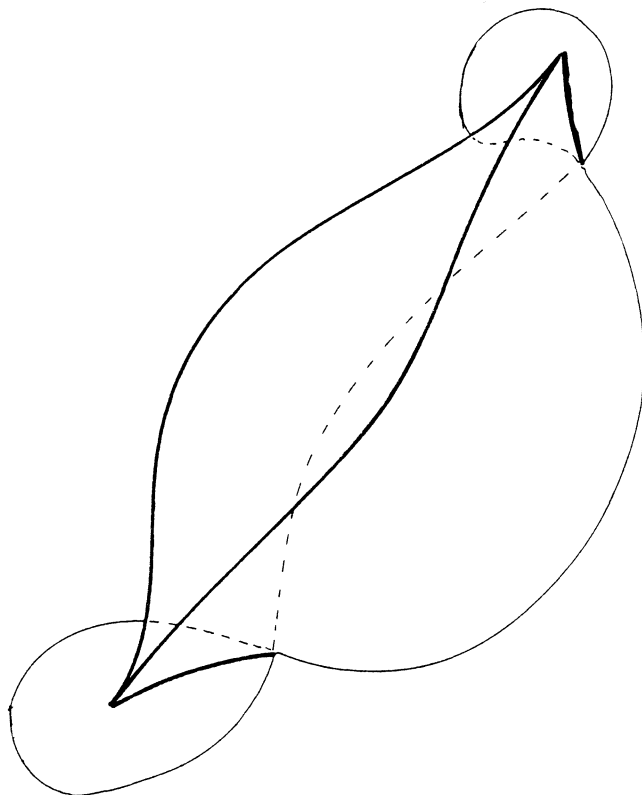


FIGURE 14

b) Si  $K(f) = K_d$ , alors  $f$  est  $A$ -homotope à  $f_d$ .

PROPOSITION 4. Soit  $M$  une surface fermée orientée, et  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  une  $A$ -mersion. Si un 1-complexe  $K$  est  $A$ -équivalent à  $K(f)$ , alors il existe une  $A$ -mersion  $g: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $A$ -homotope à  $f$ , telle que  $K(g) = K$ .

Ces propositions entraînent clairement le résultat. Notons à propos de  $a$  que nous indiquerons dans 1.3 une formule donnant  $d = d_f$  en fonction uniquement de  $K(f)$ , et non de la géométrie de  $f$ .

Démonstration de  $a$ .

LEMME 5. Soit  $A$  une arête d'un 1-complexe  $K$ . On suppose que  $A$  borde un disque  $E$  dont l'intérieur est disjoint de  $K$ . Alors le 1-complexe  $K'$  obtenu en changeant le type de  $A$  est  $A$ -équivalent à  $K$ .

DÉMONSTRATION. Pour fixer les idées, disons que  $A$  est pleine. Les opérations  $5^+$  et  $5^-$  nous permettent de supposer que les queues d'aronde de  $A$  pointent toutes vers l'extérieur de  $E$  ou toutes vers l'intérieur.

Dans le premier cas (voir figure 9), nous créons une arête pointillée à l'extérieur de  $E$  par l'opération  $1^+$ , nous appliquons l'opération  $4^+$  ou  $4^-$  pour qu'il y ait sur  $A$  exactement

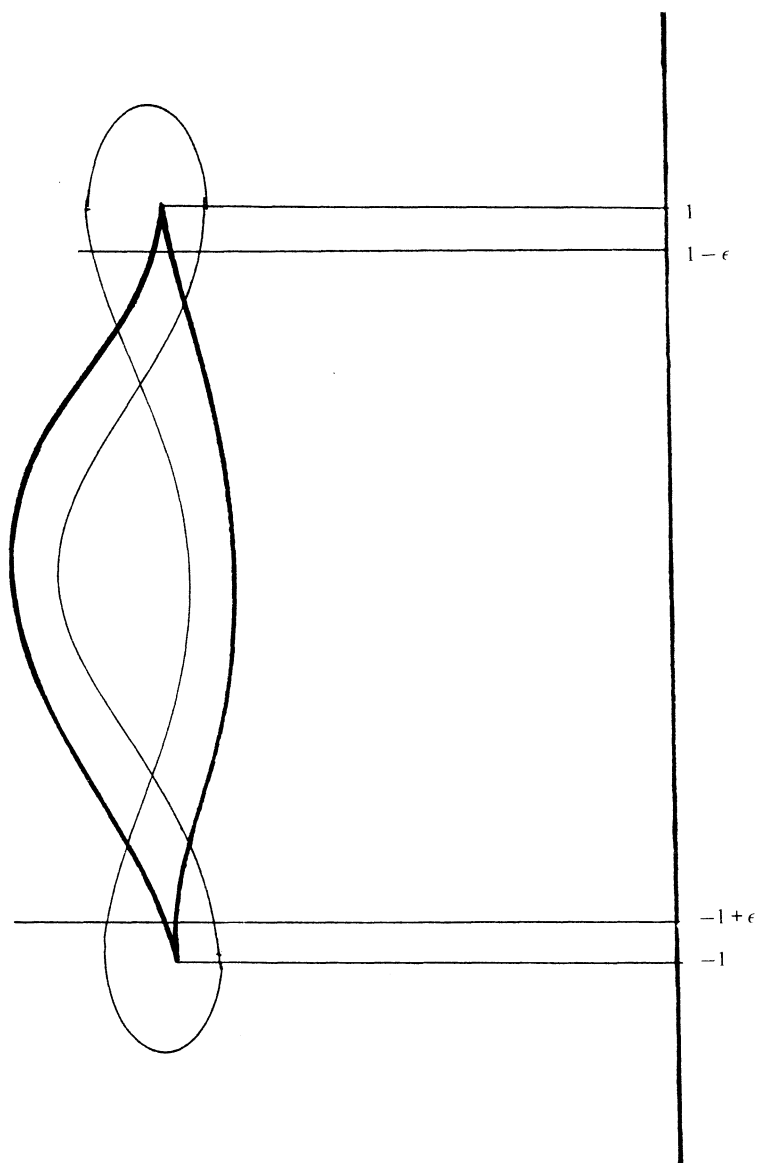


FIGURE 15

deux queues d'aronde, et nous faisons disparaître l'arête pleine par  $1^-$ .

Dans le second cas, nous raisonnons par récurrence sur le nombre  $p$  de queues d'aronde de  $A$ . Si  $p = 1$  (voir figure 10), nous créons deux queues d'aronde par  $5^+$ , nous remplissons  $A$  par deux arêtes pleines portant respectivement 0 et 1 queue d'aronde

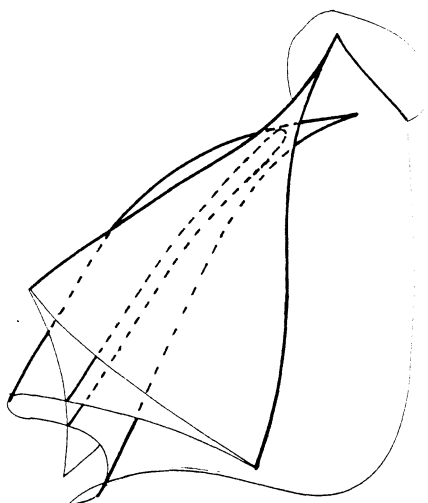


FIGURE 16A

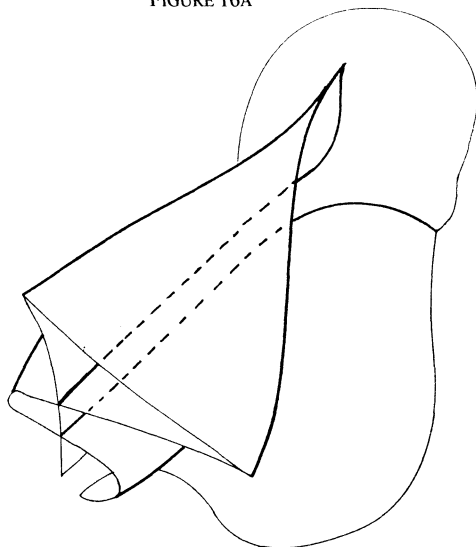


FIGURE 16B

(par  $2^-$ ), nous changeons le type de ces arêtes grâce à ce qui précède, et nous revenons à  $A$  en parcourant le chemin inverse (opérations  $2^+$  et  $5^-$ ).

Si  $p \geq 2$  (voir figure 11), nous appliquons l'opération  $2^-$  sur deux queues d'aronde de  $A$ , nous changeons le type des deux arêtes ainsi obtenues en utilisant l'hypothèse de récurrence, et nous connectons ces deux arêtes par  $2^+$ . ■

Joint à l'opération  $2^+$ , ce lemme nous permet de remplacer le 1-complexe  $K(f)$  par un 1-complexe  $A$ -équivalent possédant exactement une arête, que nous pouvons supposer pleine (si  $K(f) = \emptyset$ , nous créons une arête par  $1^+$ ). Par  $5^-$ , nous pouvons faire que toutes les queues d'aronde de cette arête pointent du même côté. Elles sont en nombre pair,

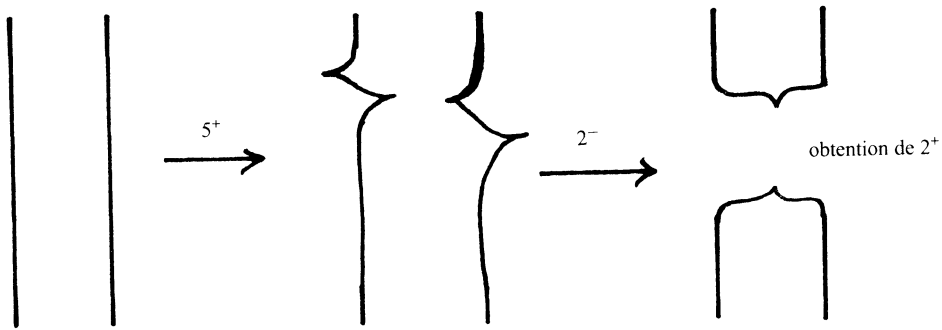


FIGURE 17A

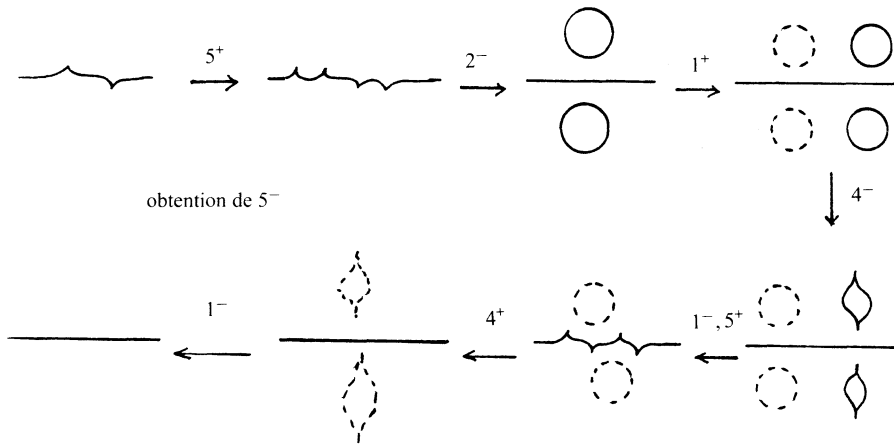
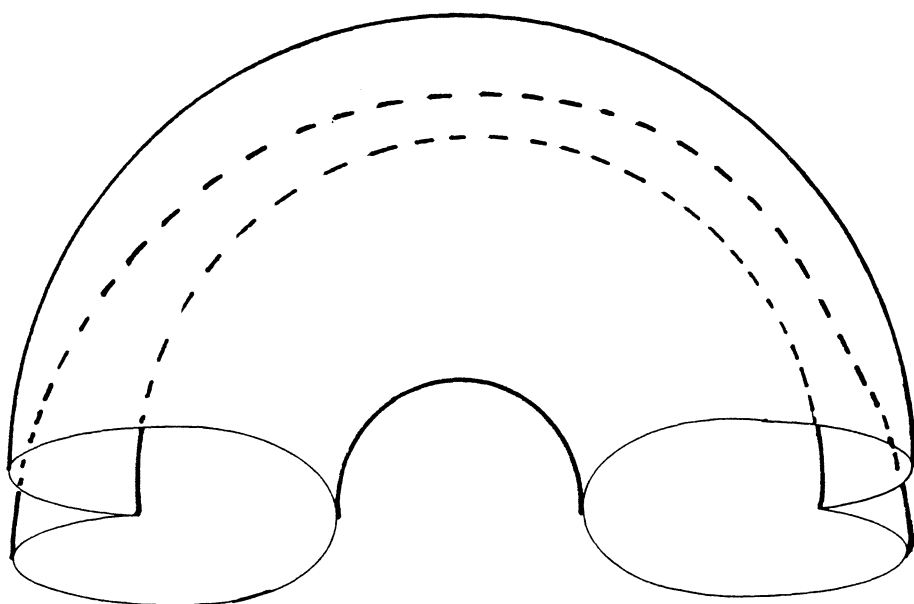


FIGURE 17B

et par  $2^-$  nous les éliminons par paires adjacentes. Ceci fait, le 1-complexe n'a plus de queues d'aronde et se compose d'arêtes pleines bordant des disques disjoints. ■

*Démonstration de b.* D'une façon générale, considérons une  $A$ -mersion  $f$  sans queue d'aronde, et l'immersion  $f'$  obtenue en lissant les arêtes de  $f$  (voir figure 12). On remarque que  $f$  est entièrement déterminée (à  $A$ -homotopie régulière près) par la donnée de  $f'$  et de  $K(f)$  (avec le type de chaque arête). L'assertion  $b$  résulte alors immédiatement du résultat de Smale [Sm] affirmant que deux immersions quelconques de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont régulièrement homotopes. ■

*Démonstration de la proposition 4.* Nous devons envisager une par une les opérations 1, 2, 4, 5. Le résultat est clair pour  $1^+$  et  $5^+$ . Pour  $2^-$  (resp. 4), on se ramène à la situation de la figure 3 en "tirant" (voir figure 13) sur une (resp. la) queue d'aronde pour l'amener dans  $\mathbb{R}^3$  juste en face de l'autre queue d'aronde (resp. de l'autre arête); l'information portée par  $K(f)$  (indentations, type des arêtes) garantit que les deux queues d'aronde (resp. la queue d'aronde et l'arête) sont disposées l'une par rapport à l'autre comme sur la figure 3.



La moitié d'un tore de révolution présentant une arête de rebroussement le long d'un parallèle.

FIGURE 18

Pour  $1^-$ , soit  $D \subset M$  un disque bordé par une arête portant deux queues d'aronde, comme sur la figure 8 (bas de la première colonne). Le disque étant contractile, une homotopie régulière nous permet de supposer que  $f|D$  est un plongement standard; pour fixer les idées, disons que  $f(D)$  est proche du plan des  $xy$ , que les queues d'aronde sont les points  $(0, 1, 0)$  et  $(0, -1, 0)$ , et que l'image d'un voisinage de  $D$  est symétrique par rapport aux plans  $yz$  et  $xz$  (voir figure 14).

Nous ne pouvons pas directement appliquer à  $f$  la première opération d'Arnold, car nous ne savons pas qu'un voisinage de  $D$  est envoyé dans  $\mathbb{R}^3$  comme sur la figure 3 (bas de la première colonne); en particulier, rien ne garantit que la courbe de points doubles issue d'une des queues d'aronde du bord de  $f(D)$  aboutit à l'autre. Nous allons donc devoir modifier  $f$  par homotopie régulière au voisinage de  $D$ , et en particulier rajouter des points doubles.

Soit  $D'$  le voisinage de  $D$  tel que la projection de  $f(\delta D')$  sur le plan  $xy$  soit la courbe représentée en pointillé sur la figure 15. La partie  $F$  de  $D' - D$  qui s'envoie dans la tranche  $-1 + \varepsilon \leq y \leq 1 - \varepsilon$  a deux composantes; la projection de l'une d'elles est hachurée sur la figure 15. Nous allons modifier  $f$  dans l'intérieur de  $F$ , de façon symétrique par rapport au plan  $xz$  (mais pas par rapport au plan  $yz$ ).

D'abord on crée une courbe de points doubles en tirant l'image d'une des composantes de  $F$  sous le plan  $xy$  (voir figure 16a, où par symétrie on représente seulement la partie  $0 \leq y \leq 1 - \varepsilon$ ). Ensuite (voir figure 16b) on effectue une chirurgie sur les courbes

de points doubles en passant par une étape où la surface présente avec elle-même une tangence de type selle.

Ceci fait, l' $A$ -mersion modifiée envoie un disque intermédiaire  $D \subset D'' \subset D'$  comme sur la figure 3, ce qui permet d'éliminer les deux queues d'aronde et l'arête par  $A$ -homotopie.

Enfin  $2^+$  et  $5^-$  peuvent se réaliser en combinant les opérations précédentes (voir figure 17). ■

**1.3 Démonstration du théorème 2 et formule pour le degré.** On peut donner deux démonstrations du théorème 2. La première est indirecte et utilise ce qui précède, la deuxième est directe et utilise une formule donnant  $d_f$  à partir de  $K(f)$ .

i) Si on reprend la démonstration de l'assertion a de la proposition 3, on constate que, si  $f$  n'est pas une immersion (*i.e.* si  $K(f) \neq \emptyset$ ), on est passé par  $A$ -équivalence de  $K(f)$  à  $K_d$  sans jamais augmenter  $a + \frac{1}{2}q$ . En effet, les seules modifications de  $K(f)$  consistent à:

- changer le type d'une arête (lemme 5), ce qui n'affecte ni  $a$  ni  $q$ .
- par  $2^+$ , connecter deux arêtes distinctes de même type en créant deux queues d'aronde: ceci diminue  $a$  de 1 et augmente  $q$  de 2.
- par  $5^-$ , éliminer des queues d'aronde (sans changer  $a$ ).
- par  $2^-$ , éliminer deux queues d'aronde situées sur la même arête (en rajoutant une arête).

L'inégalité cherchée étant vraie pour  $f_d$ , elle l'est donc aussi pour tout  $f$ . ■

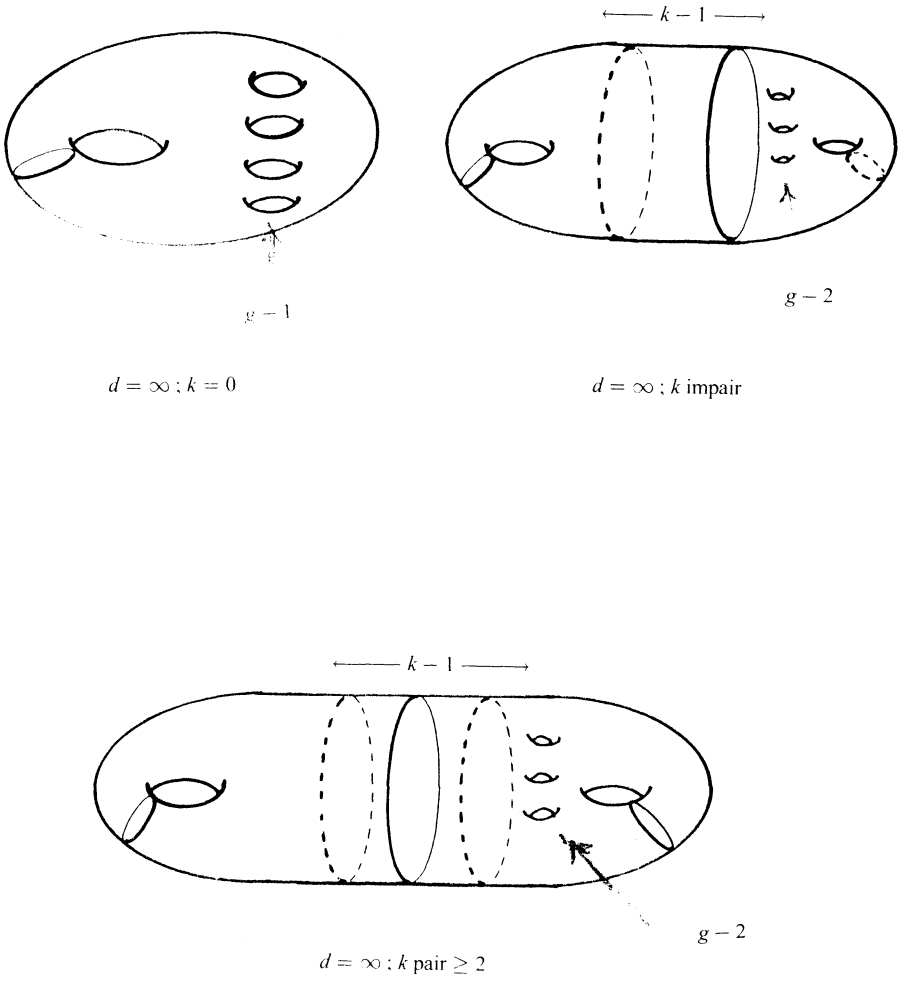
ii) Etant donné  $f$ , donnons un signe (+ ou -) à chaque région de  $S - K(f)$ , de façon que chaque arête borde d'un côté une région négative et de l'autre une région positive. Appelons  $r_f^+$  (resp.  $r_f^-$ ) le nombre de régions positives (resp. négatives), et  $q_f^+$  (resp.  $q_f^-$ ) le nombre de queues d'aronde pour lesquelles l'indentation pointe vers une région positive (resp. négative); le quadruplet  $(r_f^+, r_f^-, q_f^+, q_f^-)$  n'est bien sûr défini qu'au signe près, car on peut changer simultanément le signe de toutes les régions.

**PROPOSITION 6.**  $d_f = |r_f^+ - r_f^- + \frac{1}{2}(q_f^+ - q_f^-)|$ .

**DÉMONSTRATION.** Là encore on peut donner une preuve indirecte, en vérifiant l'égalité pour  $f_d$  et en remarquant que les deux membres sont invariants par  $A$ -homotopie. Nous préférons esquisser une démonstration directe.

Appelons  $R_i$  les régions de  $S - K(f)$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  leur signe,  $b_i$  le nombre de composantes de  $\partial R_i$ . Soit  $\kappa$  la courbure de Gauss de  $S$ , et  $k_g$  la courbure géodésique du bord de  $R_i$ . On a alors:

$$\begin{aligned}
 4\pi d_f &= \left| \sum_i \varepsilon_i \int_{R_i} \kappa \right| \\
 &= \left| \sum_i \varepsilon_i \left( 2\pi \chi(R_i) - \int_{\partial R_i} k_g \right) \right| \\
 &= \left| \sum_i 2\pi \varepsilon_i (2 - b_i) - \sum_i \varepsilon_i \int_{\partial R_i} k_g \right| \\
 &= \left| 4\pi \sum_i \varepsilon_i - 2\pi \sum_i \varepsilon_i b_i - \sum_i \varepsilon_i \int_{\partial R_i} k_g \right|.
 \end{aligned}$$



La surface doit être pliée vers l'intérieur le long des arêtes pleines, vers l'extérieur le long des arêtes pointillées (cf. figure 18 pour  $d = \infty, k = 0, g = 1$ )

FIGURE 19 ( $d = \infty$ )

Le terme  $\sum_i \varepsilon_i$  est égal à  $r_f^+ - r_f^-$ ;  $\sum_i \varepsilon_i b_i$  est nul; enfin, dans la dernière somme, chaque arête  $A$  apparaît deux fois (une avec un  $\varepsilon_i$  égal à  $+1$ , une avec un  $\varepsilon_i$  égale à  $-1$ ), et deux intégrales se compensent, à l'exception d'un résidu de  $\pm 2\pi$  pour chaque queue

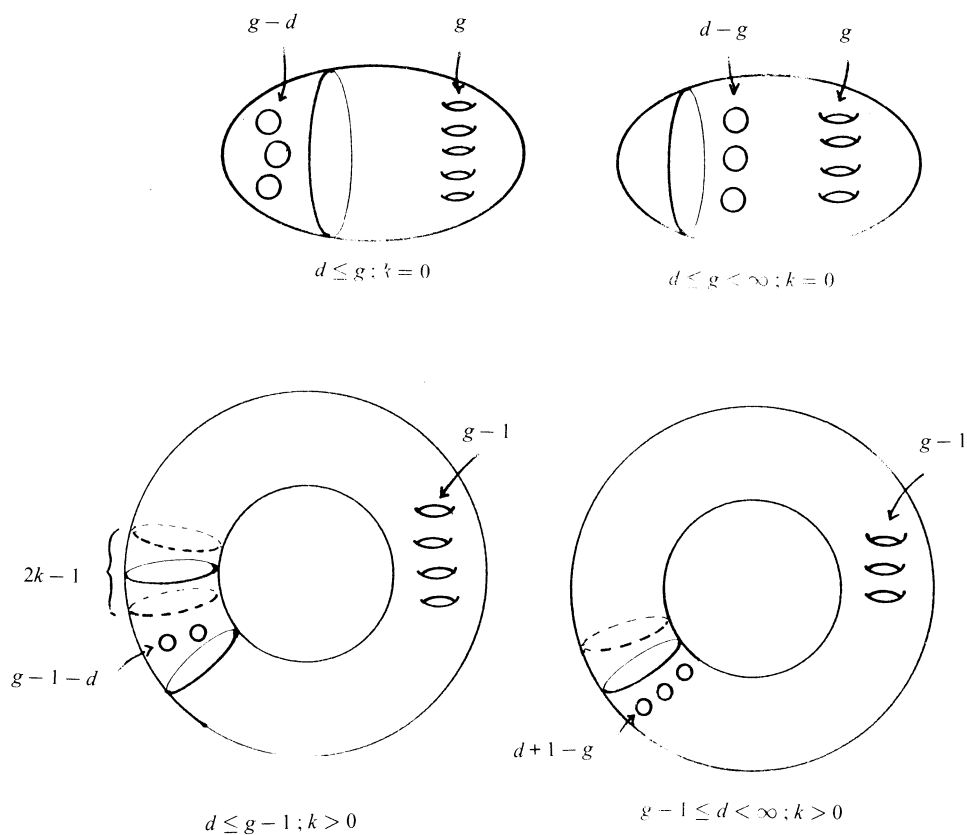


FIGURE 20 (d FINI)

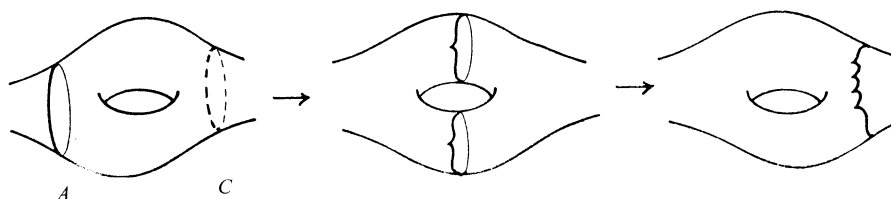


FIGURE 21

d'aronde. ■

Nous terminons maintenant cette démonstration du théorème 2 (en omettant les indices  $f$ ). Si  $f$  n'est pas une immersion, ni  $r^+$  ni  $r^-$  n'est nul, et donc  $|r^+ - r^-| \leq r^+ + r^- - 2 =$



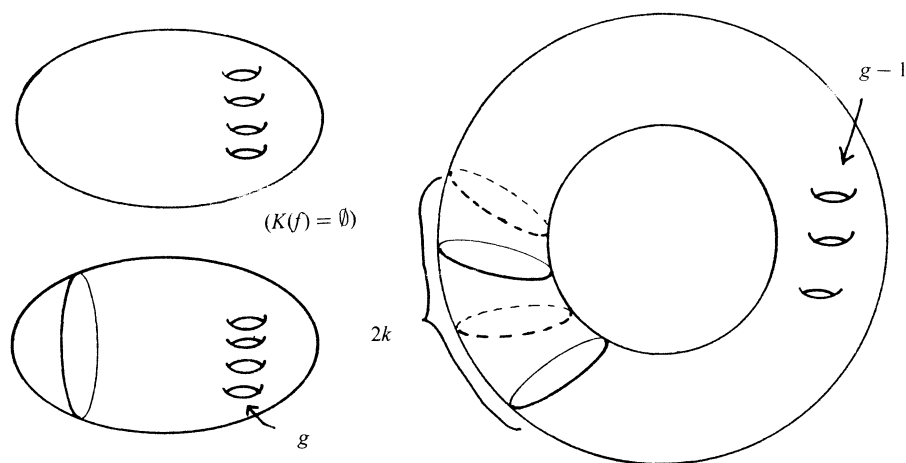


FIGURE 22

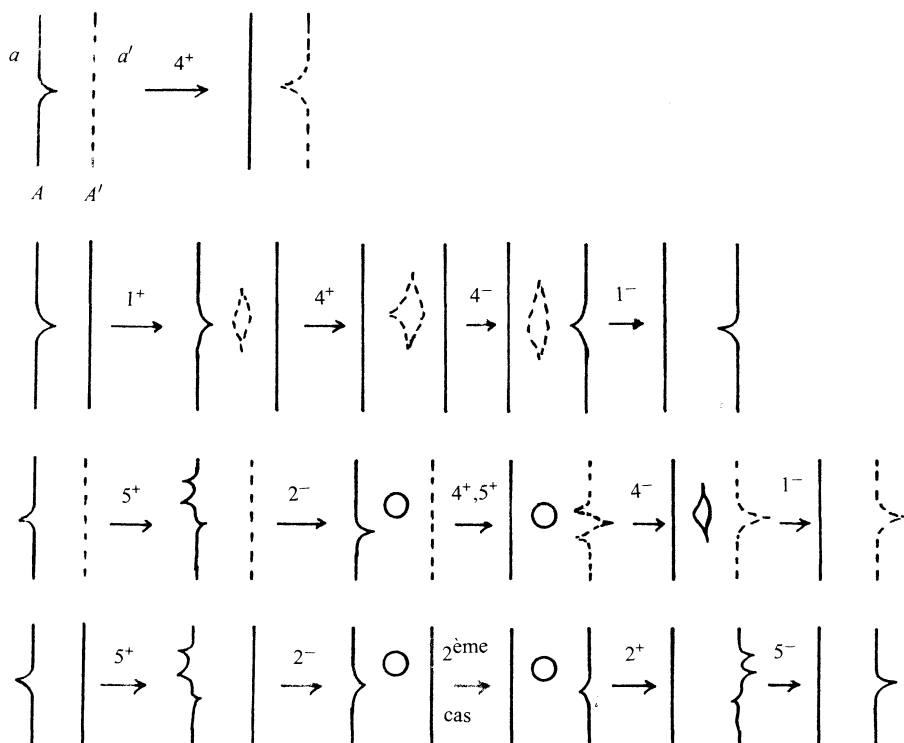


FIGURE 23

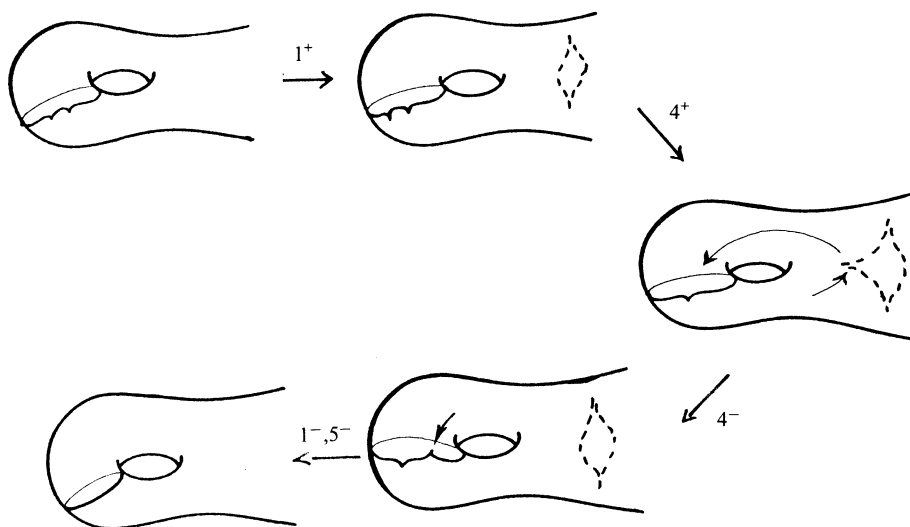


FIGURE 24

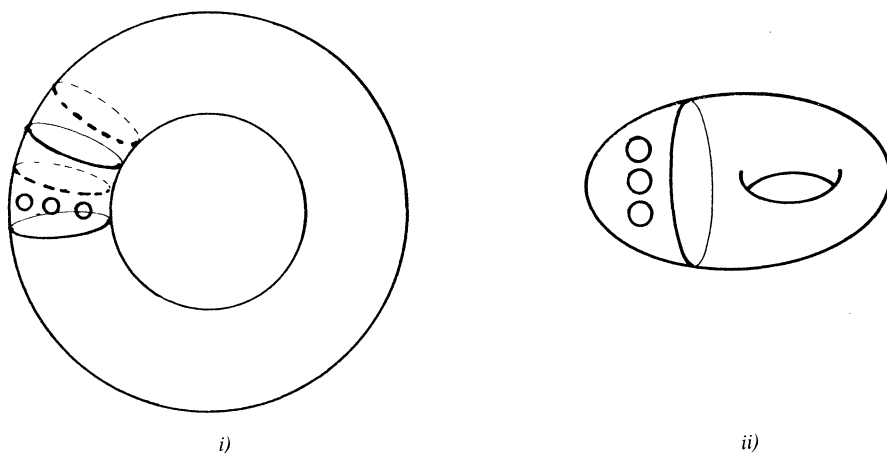


FIGURE 25

$a - 1$ . Il vient alors:  $d = |r^+ - r^- - \frac{1}{2}(q^+ - q^-)| \leq a - 1 + \frac{1}{2}(q^+ + q^-) = a + \frac{1}{2}q - 1$ . ■

**1.4 Généralisation.** Les théorèmes 1 et 2 se généralisent aux  $A$ -mersions de  $S$  dans n'importe quelle variété orientable  $V^3$ , à condition de modifier l'énoncé du théorème 1 de la façon suivante: *deux  $A$ -mersions de  $S$  dans  $V$  sont  $A$ -homotopes si et seulement si elles sont homotopes et ont le même degré; étant donné  $d \in \mathbb{N}$ , toute application de  $S$  dans  $V$  est homotope à une  $A$ -mersion de degré  $d$ .*

Bien sûr, *a priori* on ne dispose plus de l'application de Gauss. Le plus simple est alors de définir le degré d'une  $A$ -mersion de  $S$  dans  $V$  par la formule de la proposi-

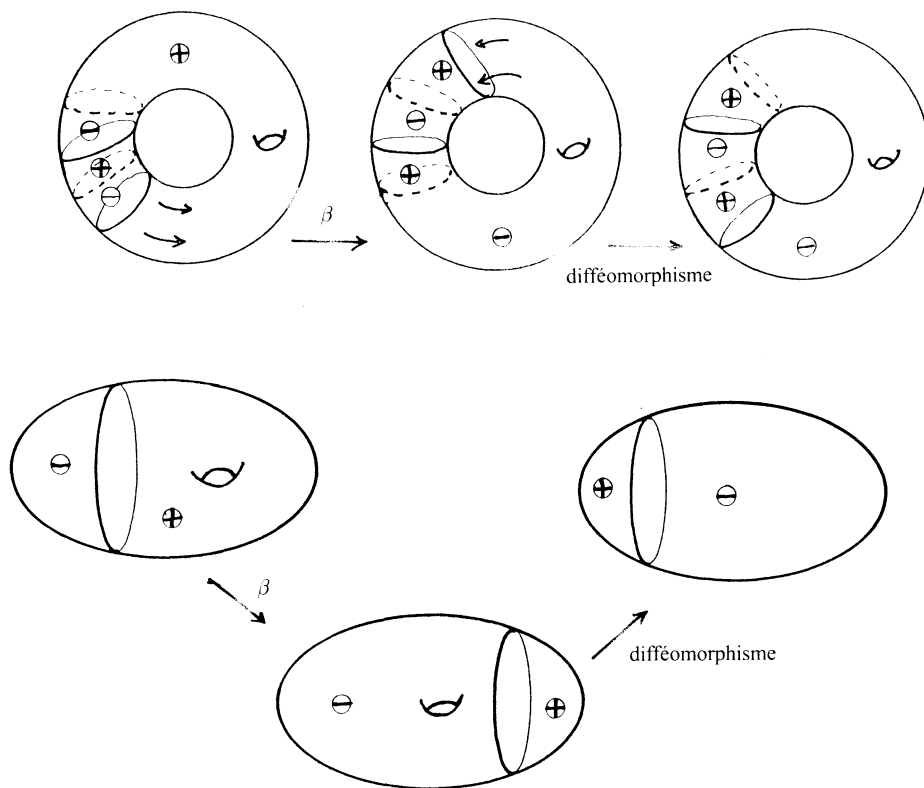


FIGURE 26

tion 6. Ceci fait, les démonstrations se font comme dans  $\mathbb{R}^3$ , en remplaçant  $f_d$  par une  $A$ -mersion obtenue en rajoutant  $d + 1$  verrues à une immersion homotope à  $f$ . On sait en effet (cf. [HH]) que toute application de  $S$  dans  $V$  est homotope à une immersion, et que deux immersions homotopes sont régulièrement homotopes.

On peut également définir le degré géométriquement. Pour cela on choisit sur  $V$  une métrique riemannienne et un champ de repères orthonormés  $(e_1, e_2, e_3)$ . Soit  $f: S \rightarrow V$  une  $A$ -mersion. Etant donné  $x \in S$ , on considère n'importe quel vecteur non nul  $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  normal à  $f(S)$  en  $f(x)$ , et on appelle  $n(x)$  la classe de  $(a_1, a_2, a_3)$  dans  $\mathbb{P}^2$ . Ceci définit une application de Gauss  $n: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ , à laquelle on associe un degré  $d_f \in \mathbb{N}$  comme dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est facile de voir que  $d_f$  ne dépend pas du champ de repères (essentiellement parce que  $SO_3$  n'a pas de  $\pi_2$ ) ni de la métrique, et coïncide avec le degré défini ci-dessus à partir de la proposition 6.

## 2. Surfaces de genre $\geq 1$ .

**2.1 Généralités.** Soit maintenant  $M$  une surface fermée orientée de genre  $g \geq 1$ . La classification des  $A$ -mersions de  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  est plus compliquée que pour la sphère, pour diverses raisons.

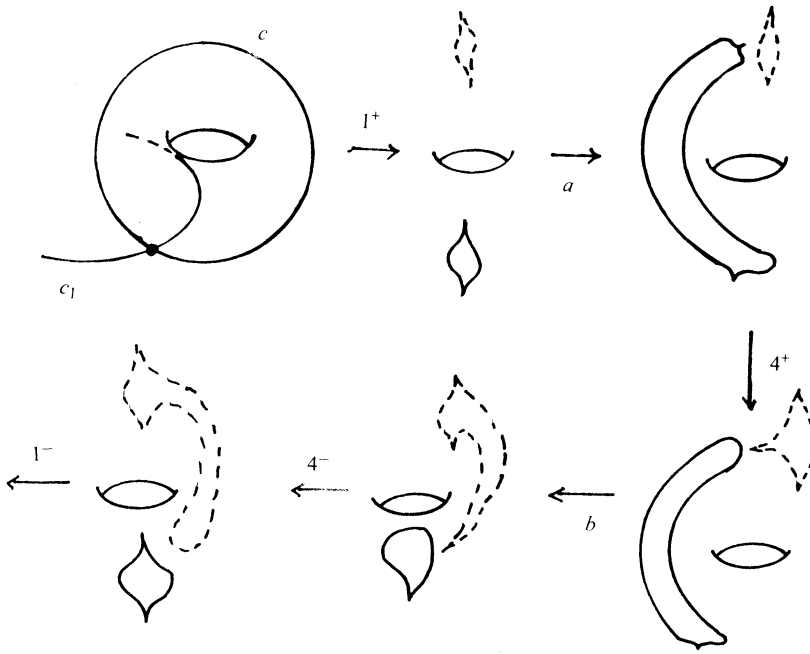


FIGURE 27

i) Considérons une  $A$ -mersion de  $\mathbb{T}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont l'image est la surface représentée sur la figure 18. En composant cette  $A$ -mersion avec des difféomorphismes de  $\mathbb{T}^2$  envoyant l'arête sur une courbe homotopiquement différente, on obtient une infinité d' $A$ -mersions qui ne sont pas  $A$ -homotopes bien qu'ayant toutes la même image.

Comme nous nous intéressons à la surface dans  $\mathbb{R}^3$  indépendamment de son paramétrage par  $M$ , nous classifions les  $A$ -mersions de  $M$  modulo  $A$ -homotopie géométrique:  $f$  et  $g$  sont  $A$ -homotopes géométriquement si  $g$  est  $A$ -homotope à  $f \circ \theta$ , où  $\theta$  est un difféomorphisme de  $M$ .

ii) Comme le montre la surface de la figure 18, le degré de  $f$  n'est pas toujours défini, car l'application de Gauss  $n: M \rightarrow \mathbb{P}^2$  ne se relève pas forcément à  $\mathbb{S}^2$ . En fait  $d_f$  est défini si et seulement si la classe  $z(f)$  déterminée dans  $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$  par les arêtes de  $f$  est nulle ( $\mathbb{Z}_2$  est le groupe à 2 éléments). Lorsque ce n'est pas le cas, nous conviendrons que le degré est infini:  $d_f = \infty$ .

iii) Deux immersions de  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  ne sont pas forcément régulièrement homotopes.

iv) Il faut faire intervenir un autre invariant entier  $k_f \geq 0$ . Considérons le produit libre  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ , représenté par des mots écrits avec deux lettres  $\alpha$  et  $\beta$  (avec  $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ ). Etant donné  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on définit comme sur la sphère le type d'une arête et le 1-complexe  $K(f)$ .

A un lacet orienté  $\gamma$ , basé en un point  $x \notin K(f)$  et transverse à  $K(f)$ , associons le mot obtenu en écrivant  $\alpha$  quand  $\gamma$  traverse une arête pleine et  $\beta$  quand  $\gamma$  traverse une arête pointillée. On vérifie qu'on définit ainsi un homomorphisme de  $\pi_1(M, x)$  dans  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ .

L'ensemble des entiers  $i \in \mathbb{Z}$  tels que  $(\alpha\beta)^i$  appartienne à l'image se compose des multiples d'un entier  $\geq 0$  que nous notons  $k_f$ . On vérifie que  $k_f$  ne dépend pas de  $x$  et est un invariant de  $A$ -homotopie géométrique. On trouvera sur les figures 19 et 20 des exemples avec  $k_f > 0$ .

Nous énonçons maintenant les résultats.

THÉORÈME 1'. Soit  $M$  une surface fermée orientable de genre  $g \geq 1$ .

1) Deux  $A$ -mersions  $f$  et  $g$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  sont  $A$ -homotopes géométriquement si et seulement si  $d_f = d_g$  et  $k_f = k_g$ .

2) Étant donné  $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une  $A$ -mersion  $f$  avec  $d_f = d$  et  $k_f = k$  (voir figures 19 et 20), sauf si  $g = 1$ ,  $d = \infty$ , et  $k > 0$ .

REMARQUE. Comme sur la sphère, tout  $A$ -mersion est  $A$ -homotope à une  $A$ -mersion sans queue d'aronde.

THÉORÈME 2'. Soit  $M$  une surface fermée orientable de genre  $g \geq 1$ , et  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  une  $A$ -mersion. Si  $d_f$  est fini, on a  $a_f \geq 2k_f$  et  $a_f + \frac{1}{2}q_f \geq 2k_f + d_f - g + 1$ . Si  $d_f = \infty$ , on a  $a_f \geq k_f + 1$ .

2.2 Démonstration du théorème 1'. Les dessins des figures 19 et 20 représentent des 1-complexes  $K_{d,k}$  sur  $M$ . Nous appelons  $f_{d,k}$  l' $A$ -mersion obtenue à partir du plongement standard en créant des arêtes de rebroussement le long des arêtes de  $K_{d,k}$  (vers l'intérieur ou l'extérieur selon le type de l'arête). On vérifie facilement que  $d_{f_{d,k}} = d$  et  $k_{f_{d,k}} = k$ . Il nous reste donc à montrer que toute  $A$ -mersion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  est  $A$ -homotope géométriquement à l'une des  $f_{d,k}$ .

1) La première étape consiste à se ramener au cas où  $K(f)$  est un  $K_{d,k}$ . Compte tenu de la proposition 4, il suffit pour cela de montrer que  $K(f)$  est  $A$ -équivalent géométriquement à un  $K_{d,k}$ , c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme  $\theta$  de  $M$  tel que  $K(f)$  soit  $A$ -équivalent à  $\theta(K_{d,k})$ : attention, si  $\theta$  renverse l'orientation, il convient de changer le type de chaque arête lorsqu'on prend l'image par  $\theta$  d'un 1-complexe.

Sur  $S$  nous avons commencé par remplacer  $K(f)$  par un 1-complexe  $A$ -équivalent possédant exactement une arête. Ici ce ne sera en général pas possible (cf. théorème 2'), mais nous allons par  $A$ -équivalence diminuer le plus possible le nombre d'arêtes de  $K(f)$ , sans pour l'instant nous préoccuper des queues d'aronde. Pour cela nous disposons de trois outils:

$\alpha$ ) Connecter deux arêtes de même type par l'opération 2<sup>+</sup>.

$\beta$ ) Faire passer une anse à une arête (voir figure 21): si une arête  $A$  de  $K(f)$  et une courbe fermée simple  $C$  disjointe de  $K(f)$  bordent une sous-surface de genre 1 d'intérieur disjoint de  $K(f)$ , on peut par  $A$ -équivalence remplacer  $A$  par une arête de même type voisine de  $C$  (et possédant peut-être davantage de queues d'aronde que  $A$ ).

$\gamma$ ) Changer le type d'une arête bordant un disque  $E$  ne contenant pas d'autre arête (lemme 5). D'après  $\beta$ , le lemme 5 reste valable même si  $E$  n'est pas un disque.

En utilisant ces outils on montre facilement que  $K(f)$  est  $A$ -équivalent géométriquement à un 1-complexe dont les arêtes (lorsqu'on oublie les queues d'aronde) sont disposées comme sur l'un des modèles de la figure 19 (si  $d_f = \infty$ ) ou de la figure 22 (si

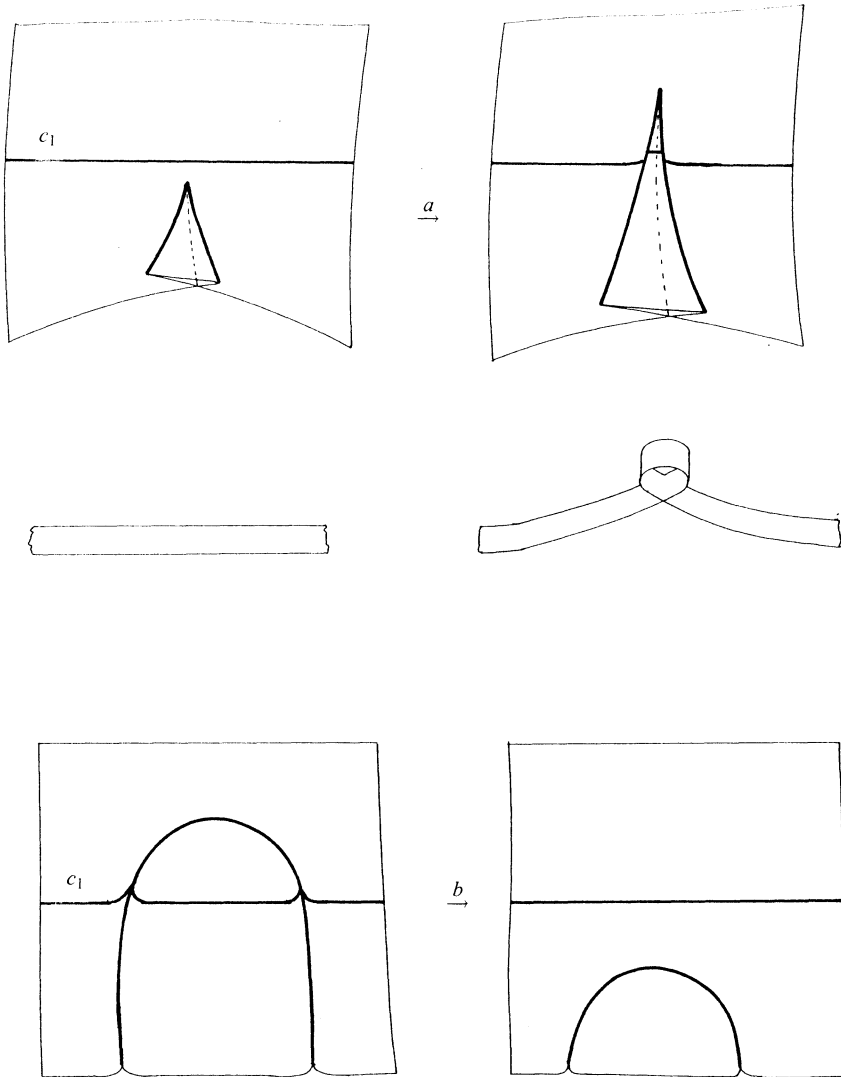


FIGURE 28

$d_f < \infty$ ); on notera que pour chacun de ces modèles il existe un difféomorphisme renversant l'orientation et envoyant chaque arête sur elle-même, ce qui permet d'ajuster le type des arêtes.

Maintenant nous devons nous occuper des queues d'aronde. Pour cela nous aurons besoin de faire passer des queues d'aronde d'une arête à une autre.

**LEMME 7.** Soit  $K$  un 1-complexe, et soit  $[a, a'] \subset M$  un arc dont l'intérieur est disjoint de  $K$  et dont les extrémités sont respectivement une queue d'aronde  $a$  située sur une arête  $A$ , et un point régulier  $a'$  d'une arête  $A'$ . Il existe un 1-complexe  $K_1$  ne différant

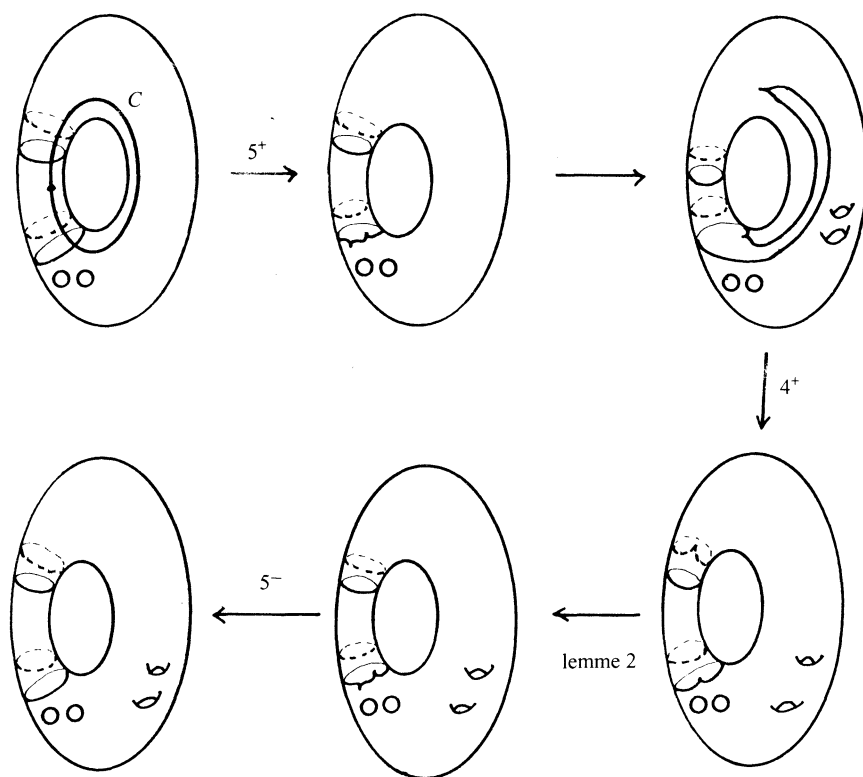


FIGURE 29

de  $K$  qu'au voisinage de  $a$  et  $a'$ ,  $A$ -équivalent à  $K$ , tel que  $a$  soit un point régulier de  $K_1$  et  $a'$  une queue d'aronde.

DÉMONSTRATION. Nous distinguons 4 cas selon le côté de  $A$  vers lequel pointe  $a$ , et selon que  $A$  et  $A'$  sont ou non de même type. Les opérations à effectuer sont représentées sur la figure 23. ■

Supposons d'abord  $d_f = \infty$ . Nous pouvons alors éliminer les queues d'aronde sans changer la disposition des arêtes de  $K(f)$ . Pour cela, nous appliquons le lemme 7 de façon à faire passer toutes les queues d'aronde sur une même arête, non homologue à 0. Par  $5^-$  nous pouvons supposer qu'elles pointent toutes du même côté de l'arête. On les élimine alors par paires comme indiqué sur la figure 24.

Supposons maintenant le degré fini. Si  $k_f = 0$ , nous sommes arrivés (comme sur la sphère) à n'avoir qu'une seule arête, et nous éliminons les queues d'aronde par  $2^-$  comme sur  $S$  (si  $K(f) = \emptyset$ , nous commençons par créer une arête par  $1^+$ ). Si  $k_f > 0$ , nous faisons passer toutes les queues d'aronde sur l'arête marquée d'une flèche sur la figure 22, et nous les éliminons comme précédemment.

[Il y a toutefois une subtilité. En effet, lorsque  $d_f$  est fini et strictement positif, les manipulations décrites ci-dessus risquent de nous faire arriver à un 1-complexe comme

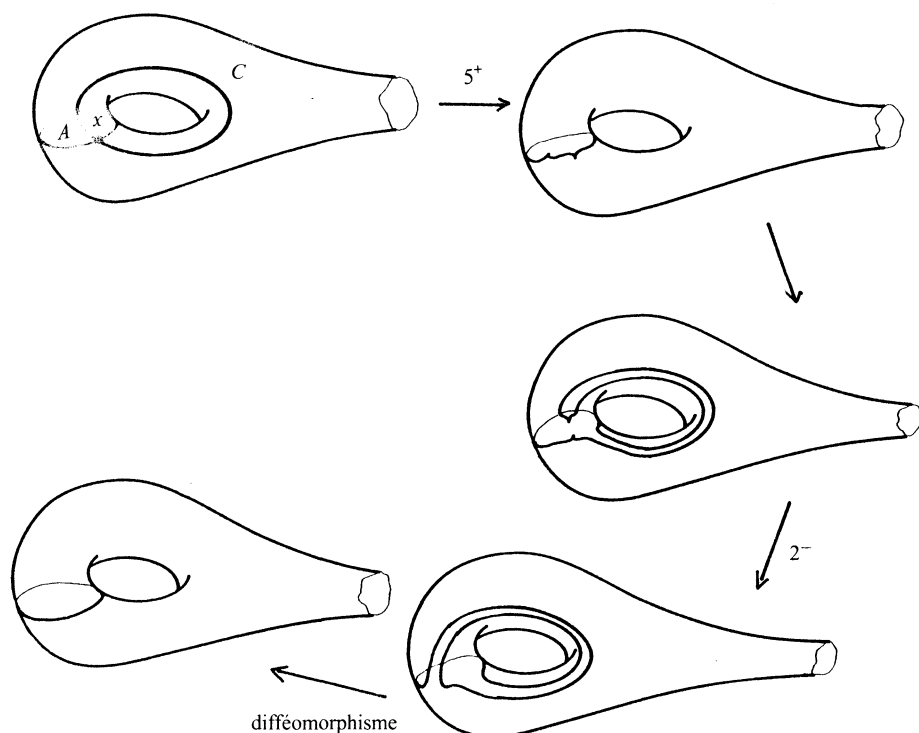


FIGURE 30

celui de la figure 25.i (resp. 25.ii), qui n'est pas un  $K_{d,k}$  car le nombre d'arêtes bordant des disques disjoints (ici 3) est strictement supérieur à  $g - 1$  (resp.  $g$ ) (comparer avec la figure 20).

Si cela se produit, il faut, avant de toucher aux queues d'aronde, utiliser  $\beta$  pour faire franchir  $g - 1$  (resp.  $g$ ) anses à une (resp.  $l'$ ) arête, et appliquer un difféomorphisme renversant (resp. préservant) l'orientation, comme indiqué sur la figure 26. Par exemple les 1-complexes de la figure 25 sont  $A$ -équivalents géométriquement à  $K_{2,2}$  et  $K_{2,0}$  respectivement.

Ce phénomène se comprend mieux lorsqu'on anticipe sur 2.3.ii: quand on donne un signe aux régions de  $M - K(f)$  comme dans 1.3, il existe pour  $d_f$  une formule analogue à la proposition 6; si  $d_f > 0$ , on peut de manière unique choisir ces signes pour que la formule reste vraie lorsqu'on enlève les signes de valeur absolue, et il faut prendre soin en se ramenant à un des modèles de la figure 22 que la région située à droite (celle qui est de genre  $g - 1$  ou  $g$ ) soit de signe *négatif* pour ce choix.]

2) Nous pouvons donc *supposer que*  $K(f)$  est un  $K_{d,k}$ . Comme sur la sphère, nous aurions fini si nous savions que l'immersion  $f'$  obtenue en lissant les arêtes de  $f$  est régulièrement homotope à l'immersion  $f'_{d,k}$  obtenue en lissant celles de  $f_{d,k}$ . Mais ce n'est pas forcément le cas.

On sait [JT, HH, Pi] que les classes d'homotopie régulière d'immersions de  $M$  dans



$\mathbb{R}^3$  sont au nombre de  $2^{2g}$  et forment un espace affine sur le corps  $\mathbb{Z}_2$ , l'espace vectoriel sous-jacent étant  $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ . A deux immersions  $\varphi$  et  $\psi$  et à une classe  $u \in H_1(M_1, \mathbb{Z}_2)$  est donc associé naturellement un élément  $d(\varphi, \psi)(u)$  de  $\mathbb{Z}_2$ .

Pour le calculer, on représente  $u$  par une courbe fermée simple  $C \subset M$ , et on considère un voisinage tubulaire  $X$  de  $C$  sur  $M$ ; on sait qu'il existe deux classes d'homotopie régulière d'immersions d'un anneau  $X$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et  $d(\varphi, \psi)(u)$  vaut 0 ou 1 selon que les immersions  $\varphi|_X$  et  $\psi|_X$  sont ou non régulièrement homotopes (cf. [Pi]).

Par dualité de Poincaré, nous pouvons regarder  $d(\varphi, \psi) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$  comme un élément  $e(\varphi, \psi)$  de  $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ : pour tout  $u$ , le nombre d'intersection  $e(\varphi, \psi) \cdot u \in \mathbb{Z}_2$  est égal à  $d(\varphi, \psi)(u)$ .

Il nous reste donc à montrer le fait suivant:

LEMME 8. *Soit  $f$  une  $A$ -mersion telle que  $K(f)$  soit un  $K_{d,k}$ . Pour tout  $u \in H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ , il existe une  $A$ -mersion  $g$ ,  $A$ -homotope géométriquement à  $f$ , avec  $K(g) = K(f)$  et  $e(f', g') = u$ .*

REMARQUE. Lorsque  $d_f = \infty$ , ce lemme devient faux si on retire le mot "géométriquement".

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que  $u$  est représentable par une courbe fermée simple  $C$  disjointe de  $K(f)$  (c'est forcément le cas par exemple pour  $k_f$  nul et  $d_f$  fini). On modifie alors  $f$  au voisinage de  $C$  comme indiqué sur la figure 27, de façon qu'une queue d'aronde "fasse le tour" de  $C$ . L' $A$ -mersion  $g$  ainsi obtenue est  $A$ -homotope à  $f$  et vérifie  $K(g) = K(f)$ .

Puisque  $f$  et  $g$  ne diffèrent que près de  $C$ , la classe  $e(f', g')$  vaut soit  $u$  soit 0. Pour exclure la deuxième possibilité, considérons une courbe  $C_1$  coupant  $C$  en exactement 1 point (voir figure 27), et un voisinage tubulaire  $X$  de  $C_1$ .

Lorsqu'on passe de  $f$  à  $g$ , la classe d'homotopie régulière de la restriction à  $X$  (après lissage des arêtes dans  $X$ ) ne peut changer que lors des étapes  $a$  et  $b$  (voir figure 27). Lors de l'étape  $a$  l'image de  $X$  acquiert un "saut périlleux" (voir figure 28) et la classe change. Au contraire lors de l'étape  $b$  la classe ne change pas (voir figure 28). On a donc  $d(f', g')(C_1) = 1$ , c'est-à-dire  $e(f', g') = u$ .

Pour montrer le résultat pour tout  $u$ , il suffit maintenant de traiter deux cas: celui où  $d_f$  est fini,  $k_f$  est non nul, et  $u$  est représentée par une courbe fermée simple  $C$  coupant exactement une fois chaque arête de  $K(f)$  non homotope à 0 (voir figure 29), et celui où  $d_f$  est infini et  $u$  est représentée par une courbe  $C$  coupant  $K(f)$  en exactement un point  $x = C \cap A$  (voir figure 30).

Dans le premier cas (voir figure 29), on crée deux queues d'aronde par  $5^+$  près d'un des points extrêmes de  $C \cap K(f)$ , on fait tourner une de ces queues d'aronde autour de  $C$  par  $4^+$ , on la fait revenir sur son arête de départ grâce au lemme 7, et on l'élimine par  $5^-$ . On vérifie en raisonnant comme plus haut que l'on a bien  $e(f', g') = u$  pour l' $A$ -mersion  $g$  ainsi obtenue.

Dans le deuxième cas (voir figure 30), on commence par créer deux queues d'aronde au voisinage de  $x$  par  $5^+$ , et on fait tourner une de ces queues d'aronde le long de  $C$  pour

l'amener en face de l'autre et éliminer la paire par  $2^-$ . On obtient ainsi une  $A$ -mersion  $f_1$  qui est  $A$ -homotope à  $f$ . On n'a pas  $K(f_1) = K(f)$ , car l'arête  $A$  a subi un double twist de Dehn le long de  $C$ , mais on vérifie que  $e(f', f'_1) = u$ .

On définit alors  $g = f_1 \circ T^2$ , où  $T$  est un twist de Dehn le long de  $C$  destiné à ramener  $K(f_1)$  sur  $K(f)$ . L' $A$ -mersion  $g$  est  $A$ -homotope géométriquement à  $f$  et vérifie  $K(g) = K(f)$ . D'autre part  $T^2$  induit l'identité sur  $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ . On a donc  $e(f'_1, g') = 0$ , et par conséquent  $e(f', g') = u$ . ■

REMARQUE. On peut montrer que  $f$  et  $g$  ne sont pas  $A$ -homotopes, mais que  $g$  est  $A$ -homotope à l' $A$ -mersion obtenue en "ajoutant une verrue" à  $f$ . Etant donné  $k \geq 0$  et  $z \in H_1(M, \mathbb{Z}_2) - \{0\}$ , il existe en fait pour les  $A$ -mersions  $f$  telles que  $k_f = k$  et  $z(f) = z$  (cf. 2.1.ii) un invariant de  $A$ -homotopie  $\tau(f) \in \mathbb{Z}_2$ , défini à partir de  $K(f)$  et des classes d'homotopie régulière de certains anneaux immergés dans  $\mathbb{R}^3$ . Bien sûr  $\tau(f)$  n'est pas un invariant de  $A$ -homotopie géométrique.

### 2.3 Démonstration du théorème 2'.

i) *Minoration de  $a_f$ .* Nous voulons montrer  $a_f \geq 2k_f$  si  $d_f$  est fini, et  $a_f \geq k_f + 1$  si  $d_f$  est infini. Pour démontrer le théorème 1' nous avons d'abord, par  $A$ -équivalence géométrique, remplacé  $K(f)$  par un 1-complexe  $K$  dont les arêtes sont disposées comme sur l'un des modèles des figures 19 et 22 (en oubliant les queues d'aronde). Pour cela nous avons employé les outils  $\alpha, \beta, \gamma$ , qui ne peuvent que diminuer le nombre d'arêtes. Il suffit donc de vérifier l'inégalité cherchée sur ces modèles, ce qui est facile. ■

ii) *Formule pour le degré.* Si  $d_f$  est fini, on peut donner un signe à chaque région de  $M - K(f)$ , comme dans 1.3. Appelons  $\varepsilon_i$  le signe d'une région, et  $g_i$  son genre. On définit  $q_f^+$  et  $q_f^-$  comme dans 1.3.

PROPOSITION 9. Si  $d_f$  est fini, on a  $d_f = |\sum_i \varepsilon_i(1 - g_i) + \frac{1}{2}(q_f^+ - q_f^-)|$ .

DÉMONSTRATION. Les deux démonstrations possibles pour la proposition 6 se généralisent sans difficulté. ■

iii) *Minoration de  $a_f + \frac{1}{2}q_f$ .* Nous supposons que  $d_f$  est fini, et nous voulons montrer l'inégalité  $a_f + \frac{1}{2}q_f \geq 2k_f + d_f - g + 1$ . Nous omettons les indices  $f$  dans ce qui suit.

A partir de  $K(f)$ , nous diminuons le plus possible le nombre d'arêtes en utilisant  $\alpha$  et  $\gamma$ , c'est-à-dire l'opération  $2^+$  pour connecter deux arêtes de même type et le lemme 5 (avec  $E$  de genre quelconque). Ces opérations laissent invariante la somme  $a + \frac{1}{2}q$  (par contre nous ne nous permettons pas  $\beta$  qui pourrait augmenter  $q$  sans diminuer  $a$ ).

Supposons d'abord  $k = 0$ . Si  $K(f)$  est vide, on a  $k = a = q = 0$  et  $d = g - 1$ , et le résultat est vrai. Sinon, nous sommes arrivés à un 1-complexe possédant exactement une arête, qui borde d'un côté une région positive de genre  $g^+$  et de l'autre une région

négative de genre  $g^-$ , avec  $g^+ + g^- = g$ . La proposition 9 donne alors  $d = |g^- - g^+ + \frac{1}{2}(q^+ - q^-)| \leq g + \frac{1}{2}q = g + \frac{1}{2}q + a - 1$ , CQFD.

Si maintenant  $k > 0$ , nous sommes arrivés à un 1-complexe  $K$  dont les arêtes (au nombre de  $2k$ ) sont disposées comme sur le troisième modèle de la figure 22, à ceci près que toutes les régions de  $M - K$  peuvent avoir un genre strictement positif. On écrit maintenant

$$\begin{aligned} d &= \left| \sum_i \varepsilon_i (1 - g_i) + \frac{1}{2}(q^+ - q^-) \right| = \left| \sum_i (-\varepsilon_i g_i) + \frac{1}{2}(q^+ - q^-) \right| \leq \sum_i g_i + \frac{1}{2}q \\ &= g - 1 + \frac{1}{2}q = g - 1 + \frac{1}{2}q + a - 2k. \end{aligned}$$

■

**3. Un autre point de vue.** Nous esquissons ici une autre approche, basée sur la théorie de Gromov [Gr1, Gr2]. Cette partie a été écrite grâce à Michèle Audin, qui nous a expliqué patiemment et en détail comment le théorème s'énonce et comment il s'applique ici.

Considérons  $\text{PT}^* \mathbb{R}^3$ , le fibré cotangent projectifié de  $\mathbb{R}^3$ . Cet espace, canoniquement identifié à  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}^3$ , est muni d'une structure de contact (définie localement par la 1-forme  $\omega$  obtenue par produit scalaire de  $\tau \in \mathbb{P}^2$  (vu comme vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$ ) avec  $dx$ ,  $x$  étant le point courant de  $\mathbb{R}^3$ ).

Soit  $M$  une surface fermée orientée. Une  $A$ -mersion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  se relève en  $h: M \rightarrow \text{PT}^* \mathbb{R}^3$  définie par  $h(x) = (n(x), f(x)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}^3$ , où  $n$  désigne l'application de Gauss (cf. 1). Ce relevé  $h$  est une immersion, legendrienne pour la structure de contact définie ci-dessus.

Réciproquement (Arnold), la projection dans  $\mathbb{R}^3$  d'une immersion legendrienne générique de  $M$  dans  $\text{PT}^* \mathbb{R}^3$  est une  $A$ -mersion, et une  $A$ -homotopie d' $A$ -mersions correspond à une famille générique à 1 paramètre d'immersions legendriennes de  $M$  dans  $\text{PT}^* \mathbb{R}^3$ . La classification des  $A$ -mersions de  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  à  $A$ -homotopie près équivaut donc à celle des immersions legendriennes de  $M$  dans  $\text{PT}^* \mathbb{R}^3$  à homotopie régulière près.

Soit  $h: M \rightarrow \text{PT}^* \mathbb{R}^3$  une immersion legendrienne,  $x \in M$ , et  $y = h(x)$ . L'image par  $d_x h$  de  $T_x M$  est un 2-plan orienté  $\gamma_h(x)$  contenu dans l'hyperplan de contact  $H_y \subset T_y \text{PT}^* \mathbb{R}^3$ . L'hyperplan  $H_y$  est muni d'une structure symplectique (donnée par  $d\omega$ ), et  $\gamma_h(x)$  est un sous-espace lagrangien de  $H_y$ .

Soit  $\tilde{\Lambda}_2 \text{PT}^* \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{PT}^* \mathbb{R}^3$  le fibré dont la fibre au dessus d'un point  $y$  est la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens orientés de  $H_y$ . Nous avons associé à une immersion legendrienne  $h: M \rightarrow \text{PT}^* \mathbb{R}^3$  une application  $\gamma_h: M \rightarrow \tilde{\Lambda}_2 \text{PT}^* \mathbb{R}^3$ . Notons de plus que  $\gamma_h$  induit le fibré tangent à  $M$ , en ce sens que  $TM$  est isomorphe à  $\gamma_h^* \lambda_2$  (où  $\lambda_2$  est le fibré tautologique sur  $\tilde{\Lambda}_2 \text{PT}^* \mathbb{R}^3$ ).

On peut en fait déduire de Gromov que la correspondance  $h \rightarrow \gamma_h$  définit une bijection entre classes d'homotopie régulière d'immersions legendriennes de  $M$  dans  $PT^* \mathbb{R}^3$  d'une part, et classes d'homotopie d'applications de  $M$  dans  $\tilde{\Lambda}_2 PT^* \mathbb{R}^3$  induisant  $TM$  d'autre part.

En utilisant le fait que  $M$  est stablement parallélisable, on trouve ensuite une bijection avec l'ensemble de toutes les classes d'homotopie  $[M, U(2)\mathbb{P}^2]$ ; l'espace  $U(2)\mathbb{P}^2$  est le fibré sur  $\mathbb{P}^2$  de fibre  $U(2)$ , obtenu en quotientant  $U(2) \times \mathbb{S}^2$  par l'involution agissant par conjugaison complexe sur  $U(2)$  et par antipodie sur  $\mathbb{S}^2$ .

Pour déterminer  $[M, U(2)\mathbb{P}^2]$ , calculons le  $\pi_1$  et le  $\pi_2$  de  $U(2)\mathbb{P}^2$ . On montre que  $\pi_1(U(2)\mathbb{P}^2)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ , et que l'homomorphisme  $p_*: \pi_1(U(2)\mathbb{P}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2)$  induit par la projection  $p: U(2)\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  envoie l'élément non trivial de chaque facteur  $\mathbb{Z}_2$  sur l'élément non trivial de  $\pi_1(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}_2$ .

On note ensuite que  $p$  induit un isomorphisme de  $\pi_2(U(2)\mathbb{P}^2)$  avec  $\pi_2(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$ , et que l'action de  $\pi_1(U(2)\mathbb{P}^2)$  sur  $\pi_2(U(2)\mathbb{P}^2)$  est donnée par  $p_*: \pi_1(U(2)\mathbb{P}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2) \simeq \text{Aut } \pi_2(U(2)\mathbb{P}^2)$ .

Pour classer les applications de  $M$  dans  $U(2)\mathbb{P}^2$ , on considère d'abord l'homomorphisme induit sur le  $\pi_1$  (nous négligeons les problèmes de point-base). On sait ensuite que les classes d'homotopie d'applications induisant un homomorphisme donné  $\rho$  de  $\pi_1(M)$  dans  $\pi_1(U(2)\mathbb{P}^2)$  sont en bijection avec  $H^2(M, \pi_2(U(2)\mathbb{P}^2))$ , cohomologie tordue par l'action de  $\pi_1(M)$  sur  $\pi_2(U(2)\mathbb{P}^2)$  donnée par  $p_* \circ \rho: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2) \simeq \text{Aut } \pi_2(U(2)\mathbb{P}^2)$ . Ce groupe de cohomologie est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$  selon que l'action est triviale ou non.

En mettant bout à bout tout ce qui précède, on obtient une classification algébrique des  $A$ -mersions à  $A$ -homotopie près. Nous indiquons le rapport entre l'algèbre et la géométrie. L'homomorphisme  $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(U(2)\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  correspond à l'homomorphisme défini dans 2.1.iv. Le cas où l'action de  $\pi_1(M)$  sur  $\pi_2(U(2)\mathbb{P}^2)$  est triviale est celui où  $d_f$  est fini, et  $H^2(M, \pi_2(U(2)\mathbb{P}^2))$  correspond alors au degré. Lorsque l'action n'est pas triviale,  $d_f$  est infini et  $H^2(M, \pi_2(U(2)\mathbb{P}^2)) \simeq \mathbb{Z}_2$  distingue les  $A$ -mersions  $A$ -homotopes géométriquement mais pas  $A$ -homotopes de la fin de 2.2.

## RÉFÉRENCES

- [Ar1] V. I. Arnold, *Wave front evolution and equivariant Morse lemma*, Comm. Pure. Appl. Math. **29**(1976), 557–582.
- [Ar2] ———, *Catastrophe theory*, Springer Verlag, 1984.
- [El] Ja. M. Eliasberg, *On singularities of folding type*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34**(1970), 1110–1126; Math. USSR-Izv. **4**(1970), 1119–1134.
- [Gr1] M. Gromov, *A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities*, Actes Congrès Intern. Math. Nice **2**(1970), 221–225.
- [Gr2] ———, *Partial differential relations*, Ergebnisse Math. **9**, Springer Verlag, 1986, p. 339.
- [Ha] A. Haefliger, *Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan*, Ann. Inst. Fourier **10**(1960), 47–60.
- [HH] J. Haas and J. Hughes, *Immersiones of surfaces in 3-manifolds*, Topology **24**(1985), 97–112.
- [JT] J. James and E. Thomas, *Note on the classification of cross-sections*, Topology **4**(1966), 351–359.
- [Pi] U. Pinkall, *Regular homotopy classes of immersed surfaces*, Topology **24**(1985), 421–434.

- [Sm] S. Smale, *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **90**(1959), 281–290.  
[Wh] H. Whitney, *The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n - 1)$ -space*, Ann. Math. **45**(1944), 247–293.

*UFR Mathématiques*  
*Laboratoire de Topologie URA CNRS 755*  
*Université de Dijon*  
*214 rue de Mirande*  
*21004 Dijon Cedex*  
*France*  
*e-mail: langevin@satic.u-bourgogne.fr*

*UFR Mathématiques*  
*URA CNRS 7408*  
*Université Paul Sabatier*  
*118 route de Narbonne*  
*31062 Toulouse Cedex*  
*France*  
*e-mail: levitt@cict.fr*

*UFR Mathématiques*  
*Université Paris 7*  
*2 place Jussieu*  
*75001 Paris*  
*France*