

# PANTALONS ET FEUILLETAGES DES SURFACES

GILBERT LEVITT

(Received 12 September 1979; received for publication 13 May 1980)

## INTRODUCTION

CET ARTICLE est consacré aux feuilletages (ou aux champs de vecteurs) des surfaces compactes. Sur la sphère  $S^2$  et le tore  $T^2$ , leur nature qualitative a été déterminée; cela résulte des travaux de Poincaré et Bendixson pour les champs de vecteurs sur  $S^2$  à singularités génériques, et des travaux de Denjoy pour les champs sans singularités de  $T^2$ . Pour les surfaces de genre plus grand, nous proposons ici une étude de la structure qualitative des feuilletages dont les singularités sont des points de selle à quatre séparatrices (singularités de Morse). Nos principaux résultats sont les suivants:

**THÉORÈME 1.** *Soit sur une surface orientable compacte et sans bord  $M$  un champ de vecteurs  $X$  dont les singularités sont des selles de Morse et ne possédant pas de liaison entre selles. Il existe une famille de courbes fermées simples transverses à  $X$  (ne passant pas par les selles) et découpant  $M$  en pantalons (surfaces difféomorphes au disque à deux trous); la structure du champ induit sur ces pantalons peut facilement être explicitée.*

**THÉORÈME 2.** *Supposons en plus des hypothèses du théorème 1 que  $X$  ne possède pas d'orbite compacte. Alors il existe un difféomorphisme de  $M$  sur la surface  $N_g$  représentée à la Fig. 1 ( $g$  est le genre de  $M$ ) tel que le champ  $X_N$  induit sur  $N_g$  soit transverse aux courbes dessinées et les traverse dans le sens symbolisé par les flèches. Sur chacun des pantalons découpés sur  $N_g$ , le feuilletage déterminé par  $X_N$  est isotope au feuilletage dessiné à la Fig. 1 ci-dessous.*

(Ces théorèmes viennent d'être énoncés dans le cas particulier des surfaces sans bord et des feuilletages sans feuille compacte ni liaison entre selles; comme on le verra ci-dessous, nos résultats sont en fait plus généraux). Du Théorème 2, on déduit immédiatement:

**COROLLAIRE.** *Sous les hypothèses du Théorème 2, il existe une courbe fermée simple transverse à  $X$  et rencontrant une infinité de fois toute orbite de  $X$ .*

De même que sur le tore  $T^2$  un feuilletage sans singularité et sans composante de Reeb peut s'obtenir par *suspension* d'un homéomorphisme du cercle, de même les feuilletages auxquels s'applique le corollaire peuvent s'obtenir par un procédé canonique analogue à la suspension à partir des *échanges d'intervalles*, c'est-à-dire des bijections du cercle dans lui-même possédant un nombre fini de points de discontinuité et croissantes par morceaux (les échanges d'intervalles considérés ici sont plus généraux que ceux définis dans [9]). Amorcée par Denjoy ([3]), l'étude analytique des homéomorphismes du cercle a fourni des résultats extrêmement brillants (en particulier [1, 7]); celle des échanges d'intervalles reste en partie à faire.

Les raisons pour lesquelles nous considérons les feuilletages dont les singularités sont des selles de Morse sont nombreuses. Ainsi  $C^1$ -génériquement les singularités

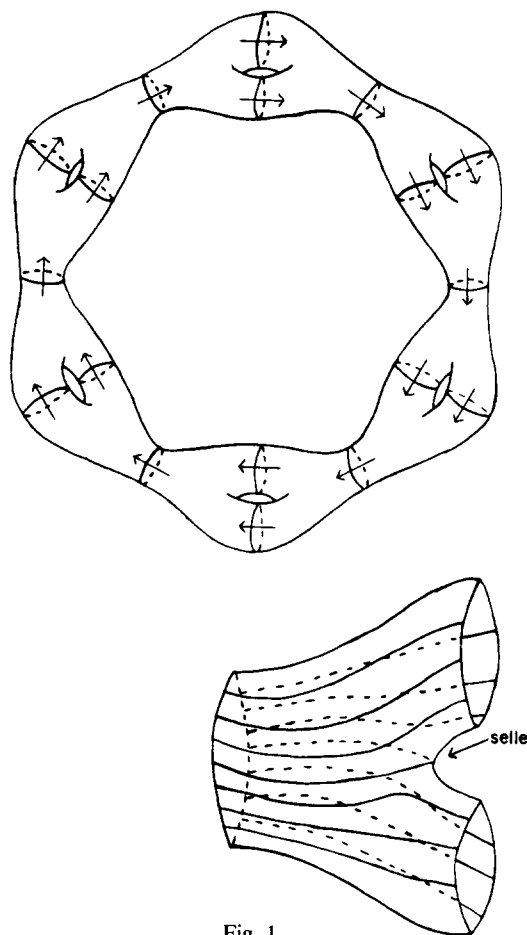


Fig. 1.

d'un champ de vecteurs sur une surface sont des selles, des sources et des puits. En découpant un petit disque autour des sources et des puits, on obtient une surface à bord munie d'un feuilletage transverse au bord dont les seules singularités sont des selles. Si on se place du point de vue de la théorie de Morse, par exemple en considérant une surface plongée dans une 3-variété feuilletée, on peut par une petite modification du plongement mettre cette surface "en position générale", et alors les singularités du feuilletage induit sur la surface sont des centres et des selles. Là encore en supprimant des parties de la surface on peut canoniquement se ramener au cas où les seules singularités sont des selles, et en fait nos résultats peuvent se généraliser aux feuilletages possédant des centres. Sous certaines conditions on peut d'ailleurs par une isotopie du plongement faire disparaître les centres (voir les techniques utilisées dans [13]). Quant aux *feuilletages mesurés* des surfaces ([5, 16]), leurs singularités sont des points de selle possédant un nombre quelconque  $k \geq 3$  de séparatrices. Mais dès qu'il existe une selle pour laquelle  $k$  est impair le feuilletage n'est pas orientable, i.e. ne peut pas être défini par un champ de vecteurs. Si au contraire pour toute selle  $k$  est pair, le feuilletage peut le plus souvent être transformé par "opérations de Whitehead" en un feuilletage comme ceux que nous considérons.

L'idée de décomposer une surface en pantalons pour comprendre une certaine structure géométrique s'est déjà révélée utile pour étudier l'espace de Teichmüller et les feuilletages mesurés (voir, e.g. [5]). Pour les feuilletages que nous considérons comme pour les métriques hyperboliques ou les feuilletages mesurés, le pantalon se révèle être une surface assez simple pour que l'on puisse déterminer assez facilement la structure induite, et en même temps assez compliquée pour permettre de recons-

truire toutes les surfaces. L'existence pour un feuilletage d'une décomposition en pantalons est démontrée dans le §2 ci-dessous, après le §1 qui introduit définitions et notations. Parmi les feuilletages dont les singularités sont des selles de Morse, l'ensemble de ceux qui admettent une décomposition en pantalons contient l'ouvert dense des feuilletages structurellement stables (cf. [11]). Le §3 présente quelques exemples et contre-exemples, montrant en particulier que la présence d'une seule liaison entre selles peut modifier de façon frappante les propriétés du feuilletage. Le §4 est consacré à la démonstration de notre principal théorème (dont le théorème 2 ci-dessus est un cas particulier). Le §5 en présente quelques applications, montrant en particulier que "presque toute feuille ne passe pas trop souvent trop près des selles". Nous définissons également la suspension d'un échange d'intervalles (par une construction déjà connue mais qui à ma connaissance n'a pas encore été publiée), et finalement nous étudions sous quelles conditions un feuilletage peut être considéré comme une telle suspension.†

Je tiens à remercier ici tous les mathématiciens qui à un titre ou à un autre m'ont aidé lors de la préparation de cet article, notamment ceux de Paris et de Berkeley ainsi qu'A. Katok, W. Thurston, et S. Goodman. Je dois en particulier beaucoup à François Laudenbach, à Rémi Langevin (pour sa patience exemplaire), à Albert Fathi (pour ses remarques pertinentes et sa bonne volonté à m'expliquer les cycles asymptotiques), et surtout à Harold Rosenberg qui m'a fourni (en plus de bien d'autres choses) le point de départ de cet article en démontrant l'existence d'une décomposition en pantalons pour les feuilletages sans feuille compacte ni liaison entre selles définis par une forme différentielle fermée. C'est également lui qui m'a suggéré que les Théorèmes 2.1 et 4.1 pouvaient englober le cas des feuilletages possédant des feuilles compactes.

Sur les feuilletages que nous étudions, des résultats importants et intéressants ont été obtenus par Stredder dans les quatre derniers chapitres de sa thèse ([15]). La démonstration de nos principaux résultats n'utilise pas ceux de Stredder, mais la lecture de [15] a indéniablement servi de catalyseur pour le présent article.

### §1. PRELIMINAIRES

Dans tout ce qui suit,  $M$  désignera une surface compacte orientable de genre  $g$  dont le bord possède  $b$  composantes ( $b$  peut être égal à 0). En général il n'existe pas sur  $M$  de feuilletage de codimension 1 transverse à chaque composante de  $\delta M$ . Il faut donc considérer des feuilletages *singuliers*. Les feuilletages étudiés ici sont les *feuilletages transverses à  $\delta M$  dont les singularités sont des points de selle à 4 séparatrices* (i.e. au voisinage des singularités le feuilletage peut être défini par la fonction  $x^2 - y^2$ ). Un tel feuilletage  $\mathcal{F}$  possède  $2g + b - 2$  singularités et définit un feuilletage régulier  $\mathcal{F}^*$  sur la variété  $M^*$  obtenue en retranchant de  $M$  les singularités de  $\mathcal{F}$ . Notons que l'existence de  $\mathcal{F}$  entraîne que  $M$  n'est ni une sphère  $S^2$  ni un disque  $D^2$ , et que  $M^* = M$  si et seulement si  $M$  est un tore  $T^2$  ou un anneau  $S^1 \times I$ .

Par définition, nous appellerons feuille de  $\mathcal{F}$  une *feuille de  $\mathcal{F}^*$* . Une feuille de  $\mathcal{F}$  sera dite *intérieure* si elle ne rencontre pas  $\delta M$ . D'un point de selle de  $\mathcal{F}$  partent quatre *séparatrices*. Quatre types sont possibles pour une séparatrice:

- (1) Elle revient à la même selle. (2) Elle atteint une autre selle. (3) Elle atteint  $\delta M$ . (4) Elle ne vérifie ni 1 ni 2 ni 3; elle définit alors un sous-ensemble non fermé de  $M^*$ .

Une séparatrice vérifiant 3 ou 4 sera dite *libre*.  $\mathcal{F}$  possède une *liaison* s'il existe une séparatrice qui n'est pas libre. Deux séparatrices  $l$  et  $l'$  partant d'un même point

†Certains résultats du présent article (notamment le Théorème 4.1 et la Proposition 6.2) seront généralisés dans [10].

de selle  $s$  sont *adjacentes* si les deux autres séparatrices partant de  $s$  sont au voisinage de  $s$  du même côté de  $l \cup \{s\} \cup l'$  (cf. Fig. 2). Deux séparatrices partant du même point de selle et non adjacentes sont *opposées*.

Considérons une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  munie de sa topologie de feuille (et non de la topologie induite par celle de  $M$ ). Si  $x$  est un point de  $L$ , une *demi-feuille* d'origine  $x$  est une composante connexe de  $L - \{x\}$  n'aboutissant pas à un point de selle. Nous convenons que, si  $L$  est une feuille compacte intérieure (i.e. est homéomorphe à  $S^1$ ), la demi-feuille d'origine  $x$  est  $L$  tout entière (et non  $L - \{x\}$ ). Un point de  $M^*$  n'appartenant pas à  $\delta M$  est ainsi l'origine de deux demi-feuilles si sa feuille est *régulière* (i.e. n'est pas une séparatrice) mais n'est pas une feuille compacte intérieure; d'une demi-feuille si sa feuille est une feuille compacte intérieure ou une séparatrice libre; d'aucune demi-feuille si sa feuille est une séparatrice non libre (qui donc relie deux selles distinctes ou confondues).

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  sera dit *orientable* si  $\mathcal{F}^*$  l'est, c'est-à-dire s'il existe sur  $M^*$  un champ de vecteurs jamais nul tangent à  $\mathcal{F}^*$ . On peut alors orienter continûment les feuilles de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  est orienté, une composante de  $\delta M$  (qui est, rappelons le, transverse à  $\mathcal{F}$ ) sera dite *rentrante* ou *sortante* selon que les feuilles de  $\mathcal{F}$  partent de cette composante ou y arrivent. *Dorénavant nous ne considérerons que des feuilletages orientables.*

Un *cycle de feuilles* est une partie  $\gamma$  de  $M$  homéomorphe à  $S^1$  et formée de points de selle et de feuilles de  $\mathcal{F}$  (qui sont en fait des séparatrices de type 1 ou 2: nous excluons le cas trivial où  $\gamma$  serait une feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$ ). Si  $\mathcal{F}$  est orienté, chaque composante de  $\gamma \cap M^*$  acquiert une orientation. S'il existe une orientation globale de  $\gamma$  induisant toutes ces orientations, le cycle de feuilles est *totalemtent dissymétrique*. Cela revient à dire que, pour toute selle  $s$  de  $\gamma$ , les deux composantes de  $\gamma \cap M^*$  adhérentes à  $s$  (éventuellement confondues si  $\gamma$  ne contient qu'une selle) sont des séparatrices adjacentes en  $s$ . Un cycle  $\gamma$  totalement dissymétrique est dit *presque transverse* si toutes les séparatrices non contenues dans  $\gamma$  mais issues de selles de  $\gamma$  arrivent à  $\gamma$  (ou partent de  $\gamma$ ) du même côté de  $\gamma$ ; en particulier une séparatrice de type 1 détermine un cycle presque transverse. Une définition équivalente (et qui explique la terminologie) est que tout voisinage de  $\gamma$  contient une feuille compacte ou une courbe transverse à  $\mathcal{F}$  (une *courbe transverse* à  $\mathcal{F}$  désignera toujours une courbe fermée simple—i.e. l'image d'un plongement de  $S^1$  dans  $M$ —transverse à  $\mathcal{F}$  et ne contenant aucune selle de  $\mathcal{F}$ ). Définissons enfin un *cycle immergé presque transverse*: un cycle immergé est (l'image d') une application continue  $\varphi$  de  $S^1$  dans  $M$  dont l'image se compose de points de selle et de séparatrices de type 1 ou 2, et qui est injective à ceci près que l'image réciproque par  $\varphi$  d'un point de selle de  $\mathcal{F}$  peut contenir *deux* points de  $S^1$ . Un cycle immergé est presque transverse si par une modification arbitrairement petite on peut transformer  $\varphi$  en un plongement dont l'image est une feuille compacte ou une courbe transverse à  $\mathcal{F}$ . Cela revient à dire que lorsque  $m$  parcourt  $S^1$  le point  $\varphi(m)$  passe à chaque selle selon

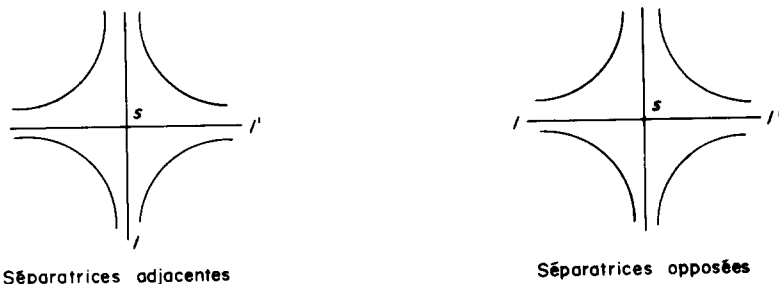


Fig. 2.

deux séparatrices adjacentes et laisse les deux autres séparatrices toujours du même côté (à sa "droite" ou à sa "gauche"). Notons que la présence d'un cycle immergé presque transverse entraîne l'existence d'un cycle (plongé) totalement dissymétrique.

Si  $M$  est une surface (compacte orientable), une *décomposition en pantalons* de  $M$  est une famille  $\mathcal{D}$  de courbes disjointes telles que toute composante de la surface obtenue en coupant  $M$  selon ces courbes soit un pantalon (c'est-à-dire soit difféomorphe au disque à deux trous). Ces pantalons seront dits *déterminés* par  $\mathcal{D}$ .

Remarquons que toute surface différente de  $S^2$ ,  $D^2$ ,  $T^2$  ou  $S^1 \times I$  admet une décomposition en pantalons; toute décomposition contient  $3g + b - 3$  courbes et détermine  $2g + b - 2$  pantalons. Deux décompositions de  $M$  sont *conjugées* s'il existe un difféomorphisme de  $M$  envoyant les courbes de l'une des familles sur les courbes de l'autre famille.

Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage fixé de  $M$ , on ne considérera que des décompositions *transverses* à  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire dont toutes les courbes sont transverses à  $\mathcal{F}$ .

Terminons ces préliminaires en décrivant rapidement certains feuilletages de deux surfaces élémentaires, l'anneau et le pantalon.

Sur l'*anneau* (que nous identifions à  $S^1 \times I$ ), tout feuilletage sans feuille compacte intérieure est isotope au feuilletage produit (dont les feuilles sont les  $\{\theta\} \times I$ ,  $\theta \in S^1$ ). Un feuilletage possédant une ou plusieurs feuilles compactes intérieures est isotope à un feuilletage dont les feuilles compactes sont les  $S^1 \times \{x\}$ , pour  $x$  appartenant à un compact  $K \subset ]0, 1[$ . Les feuilletages possibles sur les composantes connexes de  $S^1 \times (I - K)$  sont schématisés sur la Fig. 3 (la Fig. 3(a) correspond aux deux composantes rencontrant le bord de l'anneau, la Fig. 3(b) à la "composante de Reeb").

Sur un pantalon tout feuilletage orientable sans feuille compacte intérieure ni cycle de feuilles totalement dissymétrique est conjugué au feuilletage  $\mathcal{F}_0$  représenté à la Fig. 4 (et à la Fig. 1). Ce fait sera démontré par la suite, comme corollaire du Théorème 2.1 ci-dessous. Bornons-nous pour l'instant à la remarque suivante, que nous utiliserons dans la démonstration du Théorème 2.1: si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage sans feuille compacte intérieure d'un pantalon  $P$ , et s'il existe une courbe transverse à  $\mathcal{F}$  découpant  $P$  en un anneau et un pantalon  $P'$ , il suffit pour vérifier que  $\mathcal{F}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_0$  de prouver que  $\mathcal{F}|_{P'}$  l'est.

## §2. EXISTENCE D'UNE DECOMPOSITION EN PANTALONS

**THÉOREME 2.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orientable sans cycle de feuilles totalement dissymétrique d'une surface  $M$  différente de  $T^2$  et de  $S^1 \times I$ . Alors il existe sur  $M$  une décomposition en pantalons  $\mathcal{D}$  transverse à  $\mathcal{F}$ .*

—Si  $\mathcal{F}$  ne possède pas de feuille compacte intérieure, le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur chacun des pantalons déterminés par  $\mathcal{D}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_0$ . La surface  $M$  munie de  $\mathcal{F}$  peut donc s'obtenir par recollements selon leurs bords de pantalons munis de  $\mathcal{F}_0$ .

—Si  $\mathcal{F}$  possède une ou plusieurs feuilles compactes intérieures, on peut demander

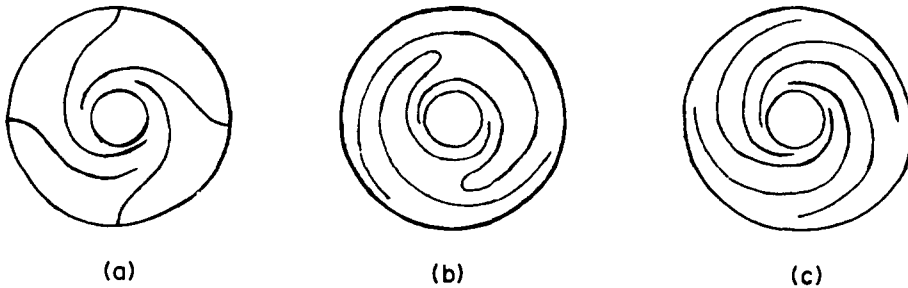


Fig. 3.

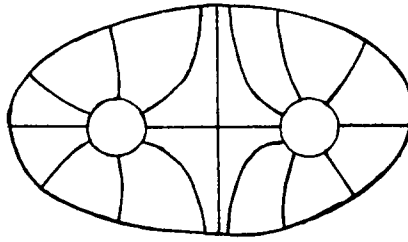
le feuilletage  $\mathcal{F}_0$ 

Fig. 4.

que ces feuilles ne rencontrent aucune courbe de  $\mathcal{D}$ . Chacun des pantalons déterminés par  $\mathcal{D}$  contient un pantalon sur lequel le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_0$ , et  $\mathcal{F}$  peut s'obtenir par recollement selon leurs bords de pantalons munis de  $\mathcal{F}_0$  et d'anneaux contenant toutes les feuilles compactes intérieures de  $\mathcal{F}$  (les feuilletages possibles sur ces anneaux ont été décrits dans les préliminaires).

**Remarque 1.** On trouvera ci-dessous (Exemples 1 et 2) des feuilletages sur la surface fermée de genre 2 orientables et sans feuille compacte mais n'admettant pas de décomposition en pantalons. Ces feuilletages possèdent des cycles de feuilles totalement dissymétriques.

**Remarque 2.** Les pantalons que l'on obtient en découpant  $M$  selon les courbes de  $\mathcal{D}$  ne sont pas forcément plongés dans  $M$ . En d'autres termes deux composantes du bord d'un pantalon peuvent provenir par découpage de la même courbe transverse à  $\mathcal{F}$ . La troisième composante du bord provient alors d'une courbe de  $M$  homologue à 0. Il existe (Exemple 3 ci-dessous) un feuilletage  $\mathcal{F}$  de la surface fermée de genre 2 sans feuille compacte ni cycle de feuilles mais tel que  $M$  ne peut pas s'écrire comme l'union de deux pantalons plongés à bords transverses à  $\mathcal{F}$ . L'Exemple 3 permet également de voir qu'il n'existe pas sur la surface fermée de genre 2 de décomposition  $\mathcal{D}_0$  telle que tout feuilletage sans feuille compacte ni cycle de feuilles admette une décomposition conjuguée à  $\mathcal{D}_0$ . Le Théorème 4.1 ci-dessous montrera que ces deux phénomènes disparaissent si on se restreint aux feuilletages sans feuille compacte ni liaison.

Avant de démontrer le Théorème 2.1, notons que l'on en déduit immédiatement le résultat suivant:

**COROLLAIRE 2.1.** *Tout feuilletage orientable d'un pantalon sans feuille compacte intérieure ni cycle de feuilles totalement dissymétrique est conjugué à  $\mathcal{F}_0$ .*

### Démonstration du Théorème 2.1

Soit  $q$  le nombre de selles de  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F}$  possède au moins une selle car  $M$  est différente de  $T^2$  ou  $S^1 \times I$ ). Nous allons montrer que l'on peut trouver  $q$  pantalons disjoints  $P_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ) plongés dans  $M$  tels que:

- chaque  $P_i$  contient exactement une selle de  $\mathcal{F}$ .
- les composantes de  $\partial P_i$  sont transverses à  $\mathcal{F}$  et ne rencontrent aucune feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$ .
- $\mathcal{F}|_{P_i}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_0$ .

Alors, si  $M_i$  est l'adhérence d'une composante de  $M - \bigcup_{i=1}^q P_i$ , le feuilletage  $\mathcal{F}|_{M_i}$  est

non singulier et transverse à  $\delta M_i$ ; donc  $M_i$  est un anneau. En choisissant une composante de  $\delta M_i$  pour chaque  $M_i$  ne rencontrant pas  $\delta M$ , on construit une famille  $\mathcal{D}$  de courbes transverses à  $\mathcal{F}$  telle qu'en découpant  $M$  selon ces courbes on obtienne  $q$  pantalons (contenant chacun l'un des  $P_i$ ). La seule chose qui reste à vérifier pour prouver le théorème est que, si  $\mathcal{F}$  ne possède pas de feuille compacte intérieure, le feuilletage induit sur chacun des pantalons déterminés par  $\mathcal{D}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_0$ . Mais cela résulte immédiatement de remarques faites dans les Préliminaires sur les feuilletages de l'anneau et du pantalon.

Avant de construire les  $P_i$ , nous devons étudier les feuilles compactes intérieures de  $\mathcal{F}$ . Notons que ces feuilles ne sont pas homotopes à 0 sur  $M$  et que, même s'il y en a une infinité, elles se répartissent en un nombre fini de classes d'isotopie (ce nombre est inférieur ou égal à  $3g + 2b - 3$ ).

**LEMME 2.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orientable sans cycle de feuilles immergé presque transverse d'une surface  $M$  différente de  $T^2$ , et  $\theta$  une classe d'isotopie de courbes fermées simples contenant au moins deux feuilles compactes intérieures de  $\mathcal{F}$ . Il existe deux feuilles compactes intérieures  $L_\theta^1$  et  $L_\theta^2$  appartenant à  $\theta$  telles que toute autre feuille compacte appartenant à  $\theta$  soit contenue dans l'anneau bordé par  $L_\theta^1$  et  $L_\theta^2$ .*

#### Démonstration du Lemme 2.1

Pour tout couple de feuilles compactes appartenant à  $\theta$ , on considère l'intérieur de l'anneau bordé par ces feuilles. Soit  $U$  l'union de tous ces intérieurs.  $U$  est un ouvert connexe de  $M$  qui, s'il existe dans  $\theta$  plus de deux feuilles compactes, contient au moins une feuille compacte (appartenant à  $\theta$ ).

La frontière de  $U$  se compose de feuilles intérieures de  $\mathcal{F}$  et éventuellement de points de selle. Si cette frontière ne contient que des feuilles compactes (qui nécessairement appartiennent à  $\theta$ ), le lemme est clair. S'il existe dans la frontière de  $U$  une feuille  $l$  qui n'est pas compacte et n'est pas une séparatrice de type 1 ou 2, il existe un ouvert distingué pour  $\mathcal{F}$  dans lequel  $l$  passe une infinité de fois, et on en déduit un intervalle compact transverse à  $\mathcal{F}$  qui coupe  $l$  une infinité de fois. Mais ceci est impossible car un tel intervalle devrait couper une infinité de fois toute feuille compacte contenue dans  $U$ . Le seul cas restant est celui où les feuilles contenues dans la frontière de  $U$  seraient des séparatrices de type 1 ou 2 (en plus éventuellement d'une feuille compacte). Mais la frontière de  $U$ , dès qu'elle contient une selle et une de ses séparatrices, contient aussi une des deux séparatrices adjacentes; on voit donc qu'elle devrait en fait contenir un cycle immergé presque transverse, ce qui par hypothèse est exclu. Cela achève de prouver le Lemme 2.1.  $\square$

Montrons maintenant l'existence des  $P_i$ . Supposons que l'on ait construit  $p - 1$  pantalons  $P_i$  ( $1 \leq i < p$ ,  $1 \leq p < q$ ) et montrons comment construire  $P_p$ . Soit  $M'$  l'adhérence d'une composante de  $M - \bigcup_{i=1}^{p-1} P_i$  contenant au moins une selle. L'hypothèse que  $\mathcal{F}$  ne possède pas de cycle de feuilles totalement dissymétrique entraîne que  $\mathcal{F}_{|M'}$  possède deux séparatrices libres opposées  $l$  et  $l'$ . Nous allons construire dans l'intérieur de  $M'$  deux courbes disjointes ou confondues  $C$  et  $C'$  transverses à  $\mathcal{F}$  telles que  $C$  (resp.  $C'$ ) rencontre  $l$  (resp.  $l'$ ) et qu'il existe un point  $x$  (resp.  $x'$ ) appartenant à  $C \cap l$  (resp.  $C' \cap l'$ ) tel que  $C'$  (resp.  $C$ ) ne rencontre pas  $l$  (resp.  $l'$ ) entre  $x$  (resp.  $x'$ ) et  $s$  ( $s$  désigne la selle d'où sont issues  $l$  et  $l'$ ). On demande de plus que  $C$  et  $C'$  ne rencontrent aucune feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$ .

L'existence de  $C$  et  $C'$  est claire si  $l$  et  $l'$  rencontrent  $\delta M'$  (noter que  $\delta M'$  ne coupe aucune feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$ ). On peut donc supposer sans perte de généralité que  $l$  ne rencontre pas  $\delta M'$ . Soit alors  $m$  un point de  $M$  qui n'est pas une

selle de  $\mathcal{F}$  et au voisinage duquel  $l$  passe une infinité de fois. Si la feuille de  $\mathcal{F}_{|M'}$  contenant  $m$  est compacte (nécessairement intérieure),  $l$  spirale vers cette feuille et il est facile de construire  $C$  (cf. Fig. 5a). Sinon, on voit en utilisant le Lemme II.1 qu'il existe un intervalle ouvert  $J$  transverse à  $\mathcal{F}$  et contenant  $m$ , mais ne rencontrant aucune feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}_{|M'}$ . La méthode usuelle de construction de transversales fermées (cf. Fig. 5b) fournit une transversale  $C$  qui coupe  $l$  et ne rencontre aucune feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}_{|M'}$ .

Si  $l'$  coupe  $C$ , on pose  $C' = C$ . Si  $l'$  ne coupe pas  $C$  mais rencontre  $\delta M'$ , on choisit comme  $C'$  une courbe voisine de la composante de  $\delta M'$  à laquelle aboutit  $l'$ . Si  $l'$  ne rencontre ni  $C$  ni  $\delta M'$ , on considère la surface obtenue en coupant  $M'$  selon  $C$ , et on obtient  $C'$  en appliquant sur cette surface la technique qui a déjà permis de construire  $C$ .

Le théorème repose maintenant sur l'observation suivante, due à Harold Rosenberg. Supposons  $C = C'$ . Alors l'orientabilité de  $\mathcal{F}$  entraîne que  $l$  et  $l'$  atteignent  $C$  du même côté de  $C$  (cf. Fig. 6). Les courbes  $C_1$  et  $C_2$  dessinées en pointillé sur la Fig. 6 peuvent être rendues transverses à  $\mathcal{F}$  et  $C_1 \cup C_2 \cup C$  borde dans  $M'$  un pantalon contenant  $s$ . Ce pantalon est le pantalon  $P_p$  cherché (on remarque que  $P_p$  ne rencontre aucune feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$  et que  $\mathcal{F}_{|P_p}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_o$ ).

Si maintenant  $C \neq C'$ , on déduit de même une courbe  $C_1$  transverse à  $\mathcal{F}$  (cf. Fig. 7), et le pantalon cherché est bordé par  $C \cup C' \cup C_1$ : le pantalon  $P_p$  ainsi obtenu contient  $s$ ,  $\mathcal{F}_{|P_p}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_o$ , et  $P_p$  ne rencontre aucune feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$ . Cela prouve le Théorème 2.1 par récurrence sur  $p$ .  $\square$

Du théorème 2.1 on déduit également le corollaire suivant, que nous utiliserons dans le §4:

**COROLLAIRE 2.2.** *Soit sur une surface  $M$  un feuilletage  $\mathcal{F}$  orientable sans cycle de feuilles totalement dissymétrique tel que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une transversale fermée. Il existe une famille finie de courbes disjointes transverses à  $\mathcal{F}$  telle que toute demi-feuille ne rencontrant pas  $\delta M$  coupe une des courbes de cette famille.*

### Démonstration du Corollaire 2.2

Pour chaque classe d'isotopie  $\theta$  contenant une feuille compacte intérieure, choisissons une transversale fermée coupant une (et donc toute) feuille compacte intérieure

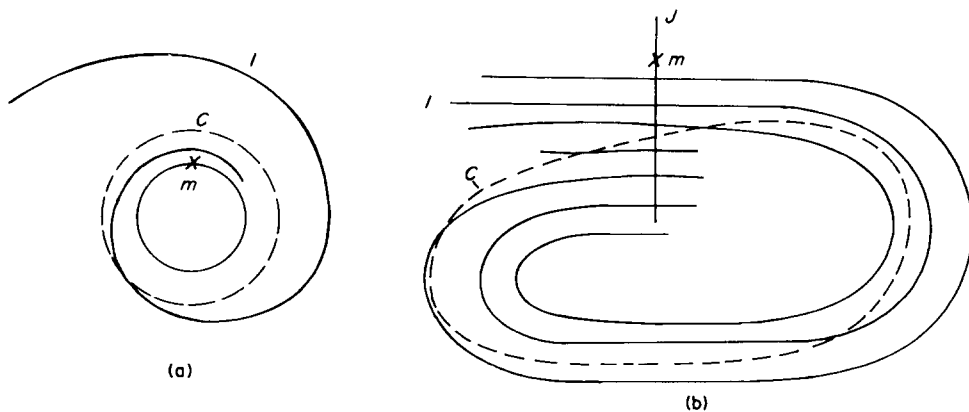


Fig. 5.



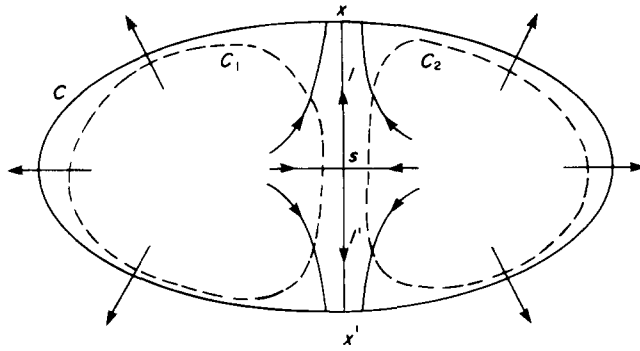


Fig. 6.

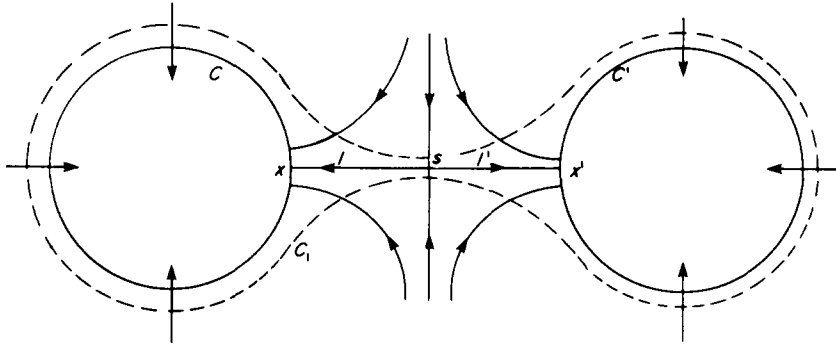


Fig. 7.

appartenant à  $\theta$ . Ajoutons à ces courbes celles de la famille  $\mathcal{D}$  donnée par le Théorème 2.1. La famille ainsi obtenue vérifie les conditions du corollaire, à ceci près que les courbes de cette famille ne sont en général pas disjointes. Mais on peut “supprimer les croisements” pour se ramener à cette situation.  $\square$

**Remarque 3.** Le Corollaire 2.2 peut également se démontrer “à la main” (sans considérer de décompositions en pantalons). Il reste en fait valable si on remplace l’hypothèse “sans cycle de feuilles totalement dissymétrique” par “sans cycle de feuilles immergé presque transverse” (voir [10]). On notera toutefois qu’il ne s’applique pas au feuilletage de l’Exemple 2 ci-dessous à cause de la présence d’un cycle de feuilles presque transverse.

**Remarque 4.** Nous montrerons dans le §4 le résultat suivant, beaucoup plus fort que le Corollaire 2.2: si, en plus des hypothèses du Corollaire 2.2,  $\mathcal{F}$  ne possède pas de liaison, alors il existe une courbe transverse à  $\mathcal{F}$  coupant toute demi-feuille ne rencontrant pas  $\delta M$ .

### 3. EXEMPLES

**Exemple 1.** Partons d’un flot irrationnel sur  $T^2$ , modifions-le en ajoutant une “boucle” comme dans la Fig. 8, et découpons le disque hachuré de manière à obtenir un feuilletage du tore troué pour lequel le bord est un cycle de feuilles. Puis recollons deux exemplaires de ce feuilletage en prenant soin de ne pas identifier les singularités, de façon à obtenir sur  $M_2$  (la surface fermée de genre 2) un feuilletage orientable sans feuille compacte mais possédant un cycle de feuilles totalement dissymétrique (cf. Fig. 8). Le cycle de feuilles n’étant coupé par aucune transversale, ce feuilletage n’admet pas de décomposition en pantalons.

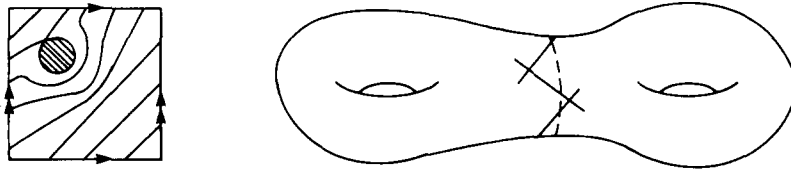


Fig. 8.

*Exemple 2.* La construction de cet exemple commence comme celle du précédent, mais au moment de recoller les deux feuilletages intercalons une composante de Reeb portée par un anneau (cf. Fig. 9), de façon à obtenir sur  $M_2$  un feuilletage orientable sans feuille compacte possédant deux cycles de feuilles presque transverses. Ces cycles de feuilles n'étant coupés par aucune transversale fermée, le feuilletage n'admet pas de décomposition en pantalons et *il est impossible de trouver une famille finie de courbes transverses telle que toute demi-feuille rencontre au moins une courbe de la famille*.

Il est possible de construire un exemple qui possède les mêmes propriétés que le précédent, mais avec seulement un cycle de feuilles presque transverse.

*Exemple 3.* Cet exemple illustre les pathologies qui peuvent se produire lorsqu'un feuilletage possède une liaison, même en l'absence de tout cycle de feuilles.

Il existe [2, 15 Chap. 9] un feuilletage  $\mathcal{G}$  sur le tore troué (i.e.  $T^2$  privé d'un disque ouvert), transverse au bord, orientable, sans feuille compacte ni liaison, tel qu'exactly une séparatrice issue du point de selle rencontre le bord et qu'il existe des feuilles régulières ne rencontrant pas le bord. Recollons deux tels feuilletages en identifiant les points où les séparatrices atteignent le bord, de façon à obtenir sur  $M_2$  un feuilletage  $\mathcal{F}$  orientable sans feuille compacte ni cycle de feuilles, mais possédant une liaison. Appelons  $s_1$  et  $s_2$  les selles de  $\mathcal{F}$ ,  $l$  la séparatrice joignant  $s_1$  à  $s_2$ ,  $C$  la courbe homologue à 0 selon laquelle s'est effectué le recollement (voir Fig. 10).

**PROPOSITION 3.1.** *Toute courbe transverse à  $\mathcal{F}$  qui coupe  $l$  est isotope à  $C$ .*

**COROLLAIRE 3.1.**  *$M_2$  ne peut pas s'écrire comme l'union de deux pantalons plongés dont les bords sont transverses à  $\mathcal{F}$ .*

**COROLLAIRE 3.2.** *Il n'existe pas de courbe transverse à  $\mathcal{F}$  rencontrant toute feuille de  $\mathcal{F}$  sauf peut-être  $l$ .*

#### Démonstration des Corollaires 3.1 et 3.2

Remarquons que, si  $P$  est un pantalon plongé dans  $M_2$  dont les bords sont transverses à  $\mathcal{F}$ , l'une des composantes de  $\partial P$  rencontre  $l$  et donc d'après la Proposition 3.1 est isotope à  $C$ . Cela prouve le Corollaire 3.1. Soit maintenant  $C_0$  une

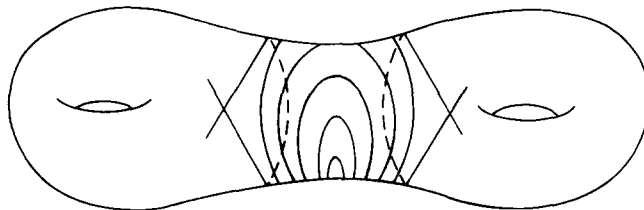


Fig. 9.

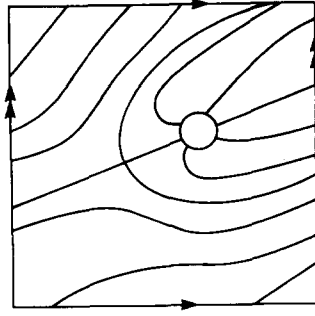
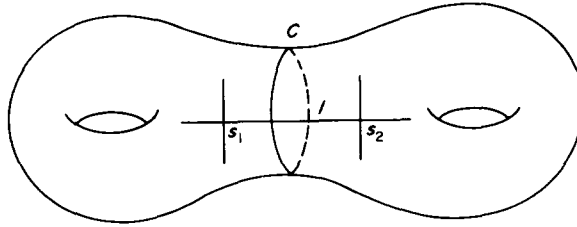
le feuilletage  $\mathcal{F}$ 

Fig. 10.

courbe transverse à  $\mathcal{F}$  rencontrant toute feuille de  $\mathcal{F}$  sauf peut-être  $l$ . La courbe  $C_0$  rencontre en particulier les séparatrices issues de  $s_1$  adjacentes à  $l$ , et par la méthode exposée lors de la démonstration du Théorème 2.1 (cf. Fig. 6) on en déduit un pantalon  $P$  plongé dans  $M_2$ , contenant  $s_1$ , et dont les bords sont transverses à  $\mathcal{F}$ . La courbe  $C_0$  est une composante de  $\delta P$ . D'après la remarque précédente, l'une des composantes de  $\delta P$  est isotope à  $C$ , et il en résulte que  $C_0$  ne coupe pas les feuilles de  $\mathcal{F}$  contenues dans la composante de  $M_2 - C$  qui ne rencontre pas  $P$ . Le Corollaire 3.2 est donc démontré.  $\square$

*Remarque 5.* Comme nous le verrons dans le §4, les résultats des Corollaires 3.1 et 3.2 ne sont possibles que parce que  $\mathcal{F}$  possède une liaison. Mais ils cessent d'être vrais si on modifie  $\mathcal{F}$  par une opération de Whitehead (ce fait est général; voir [10]).

#### Démonstration de la Proposition 3.1

Soit  $C_1$  une courbe transverse à  $\mathcal{F}$  coupant  $l$  et non isotope à  $C$ . On peut supposer que  $C_1$  coupe  $C$  transversalement et en un nombre fini de points. Supposons que cette intersection ne soit pas minimale (i.e. il existe une courbe  $C'_1$  isotope à  $C_1$  coupant  $C$  en strictement moins de points que  $C_1$ ). Alors [6] il existe un arc compact  $A$  de  $C$  et un arc compact  $B$  de  $C_1$  ne se rencontrant qu'à leurs extrémités et tels que  $A \cup B$  borde dans  $M_2$  un disque (anguleux)  $D$  dont l'intérieur ne rencontre pas  $C \cup C_1$ . En utilisant le fait que toutes les singularités de  $\mathcal{F}$  sont des selles, il est facile de montrer que le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $D$  est non singulier et donc conjugué à celui dessiné à la Fig. 11. On peut donc par une isotopie de  $C_1$  à travers des courbes transverses à  $\mathcal{F}$  diminuer le nombre de points d'intersection de  $C$  et  $C_1$ . En répétant cette opération, on voit finalement qu'il existe une transversale fermée  $C_2$  coupant  $l$ , non isotope à  $C$ , et coupant  $C$  minimalement.

On va maintenant construire une transversale  $C'$  coupant  $l$ , non isotope à  $C$  et disjointe de  $C$ . Si  $C \cap C_2 = \emptyset$ , il n'y a rien à démontrer. Si  $C \cap C_2$  est non vide, on peut supposer  $C \cap C_2 \cap l = \emptyset$ . Soit  $\alpha_2$  un arc de  $C_2$  rencontrant  $l$ , dont les extrémités  $a$  et  $b$

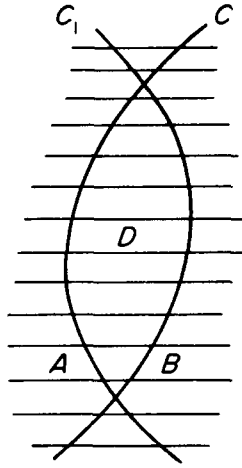


Fig. 11.

sont sur  $C$ , mais dont l'intérieur ne coupe pas  $C$ . Alors il existe une composante  $\alpha'$  de  $C - \{a, b\}$  telle que  $\alpha' \cup \alpha_2$  puisse être déformé au voisinage des points  $a$  et  $b$  de façon à donner une courbe  $C_3$  transverse à  $\mathcal{F}$ . Cette courbe coupe  $l$  (parce que  $\alpha_2$  coupe  $l$ ) et n'est pas isotope à  $C$  car l'intersection de  $C$  et  $C_2$  est minimale. Parce que  $M_2 - C$  possède deux composantes connexes, on peut modifier la courbe  $C_3$  au voisinage de  $\alpha'$  de façon à la rendre disjointe de  $C$ , tout en la laissant transverse à  $\mathcal{F}$ . On obtient ainsi la courbe  $C'$  cherchée.

On utilise maintenant un lemme technique de Stredder (Lemmes 7.1.1.1/2 et 9.1.1. de [15]), dont nous donnerons la démonstration à la fin de ce paragraphe.†

**LEMME 3.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orientable sans feuille compacte intérieure ni liaison et  $C, C'$  deux transversales disjointes non isotopes. S'il existe une feuille de  $\mathcal{F}$  coupant  $C$  et  $C'$ , il existe (cf. Fig. 12) une selle  $s$ , deux séparatrices adjacentes  $t$  et  $t'$  issues de  $s$ , un point  $x \in t \cap C$  et un point  $x' \in t' \cap C'$  tels que le segment de  $t$  (resp.  $t'$ ) compris entre  $s$  et  $x$  (resp.  $x'$ ) ne rencontre pas  $C' \cup C$ .*

On obtient la Proposition 3.1 en appliquant le Lemme 3.1 au feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur l'adhérence de la composante de  $M - C$  qui contient  $C'$ ; la situation de la Fig. 12 est en effet impossible car par construction  $C'$  rencontre  $l$  et donc le segment de  $t$  compris entre  $x$  et  $s$ .  $\square$

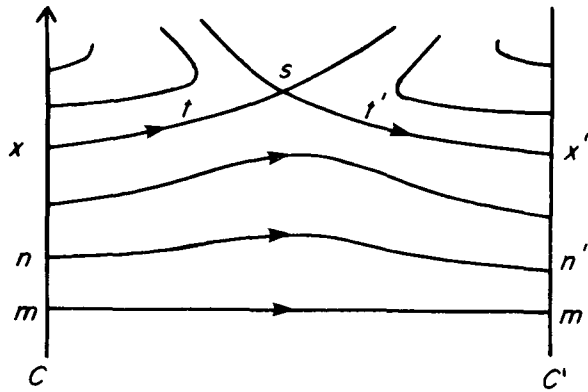


Fig. 12.

†Voir aussi [11], Lemma 3.

*Remarque 6.* Soit  $\mathcal{F}'$  un feuilletage obtenu sur  $M_2$  en recollant deux exemplaires de  $\mathcal{G}$  de façon à ne pas créer de liaison. Il existe des courbes transverses à  $\mathcal{F}'$  rencontrant toute feuille et coupant  $C$  en deux points. Mais si on “tronque” une telle transversale de façon à la rendre disjointe de  $C$  (cf. passage de  $C_2$  à  $C'$  ci-dessus), elle ne rencontre plus qu’une seule des deux séparatrices qui coupent  $C$ —celle qui est issue de la selle située de l’autre côté de  $C$ , conformément au Lemme 3.1.

### Démonstration du Lemme 3.1

Par hypothèse, on peut trouver un segment  $mm'$  contenu dans une feuille, dont l’intérieur ne rencontre pas  $C \cup C'$  et dont les extrémités appartiennent respectivement à  $C$  et  $C'$  (cf. Fig. 12). Orientons  $\mathcal{F}$  de façon que ce segment soit orienté de  $m$  vers  $m'$ , et choisissons également une orientation de  $C$ . Pour  $n \in C$  voisin de  $m$ , le segment  $mm'$  se relève en un segment  $nn'$  contenu dans une feuille de  $\mathcal{F}$ , avec  $n' \in C'$ . Si pour tout point  $n \in C$  la demi-feuille positive issue de  $n$  coupe  $C'$ , les segments ainsi déterminés permettent de construire une isotopie entre  $C$  et  $C'$ . Comme  $C$  et  $C'$  sont supposées non isotopes, il existe, lorsqu’on parcourt  $C$  à partir de  $m$ , un premier point  $x$  pour lequel la demi-feuille issue de  $x$  ne coupe pas  $C'$ .

Si cette demi-feuille aboutit à une selle (contrairement à notre définition, un morceau de séparatrice joignant un point régulier à une selle est ici considéré comme une demi-feuille), appelons  $t'$  la séparatrice issue de cette selle comme dans la Fig. 12. Si la demi-feuille issue de  $x$  n’aboutit pas à une selle, c’est elle que nous appelons  $t'$ . Il suffit pour obtenir le lemme de prouver que  $t'$  coupe  $C'$ .

Supposons donc  $t' \cap C' = \emptyset$ . Comme  $t'$  ne rencontre pas  $\delta M$  et que  $\mathcal{F}$  ne possède ni liaison ni feuille compacte intérieure, il existe des points au voisinage desquels  $t'$  passe une infinité de fois. On peut donc trouver un intervalle fermé  $[p, q]$  transverse à  $\mathcal{F}$ , ne rencontrant pas  $C \cup C'$ , et tel que  $t'$  coupe une infinité de fois tout sous-intervalle  $[p, q']$ . Comme  $t'$  ne coupe pas  $C'$ , on voit que l’intervalle découpé sur  $[p, q]$  par deux points quelconques de  $[p, q] \cap t'$  rencontre chacun des segments  $nn'$ , pour  $n \in C$  compris entre  $m$  et  $x$ . Le point  $p$  est donc adhérent à chacun de ces segments, ce qui est impossible.  $\square$

## §4. LES DECOMPOSITIONS CANONIQUES

Cette section est consacrée aux feuilletages *sans liaison*. Pour les feuilletages sans cycle de feuilles totalement dissymétrique, nous avons prouvé dans le §2 l’existence de décompositions en pantalons. Notre but maintenant est de trouver sur  $M$  une décomposition  $\mathcal{D}$  telle que tout feuilletage de  $M$  orientable sans feuille compacte intérieure et sans liaison admette une décomposition *conjugée* à  $\mathcal{D}$ . Comme nous allons le voir, c’est possible si  $M$  est fermée; si  $\delta M$  est non vide, la situation est un peu plus compliquée car il faut considérer le nombre de bords rentrants et sortants des feuilletages.

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage *orienté* de  $M$  et  $\mathcal{D}$  une décomposition de  $M$  en pantalons transverse à  $\mathcal{F}$ . Chaque courbe de la décomposition ainsi que chaque composante de  $\delta M$  acquiert une *orientation transverse* induite par  $\mathcal{F}$ . En particulier, on peut parler de bords rentrants et de bords sortants (cf. Préliminaires).

$\mathcal{F}$  définit ainsi un triplet  $(g, r, s)$  où  $g$  est le genre de  $M$ ,  $r$  le nombre de composantes rentrantes de  $\delta M$ ,  $s$  le nombre de composantes sortantes. Notons la relation  $2g + r + s \geq 3$  (qui exprime simplement que  $M$  n’est ni  $D^2$  ni  $S^2$  ni  $T^2$  ni  $S^1 \times I$ ), et remarquons également que si  $\mathcal{F}$  ne possède ni liaison ni feuille compacte

intérieure alors  $(g, r, s)$  n'est égal ni à  $(0, 0, 3)$  ni à  $(0, 3, 0)$ . En fait, comme nous le verrons par la suite (cf. Remarque 9),  $g = 0$  entraîne  $r \geq 1$  et  $s \geq 1$  si  $\mathcal{F}$  ne possède ni liaison ni feuille compacte intérieure.

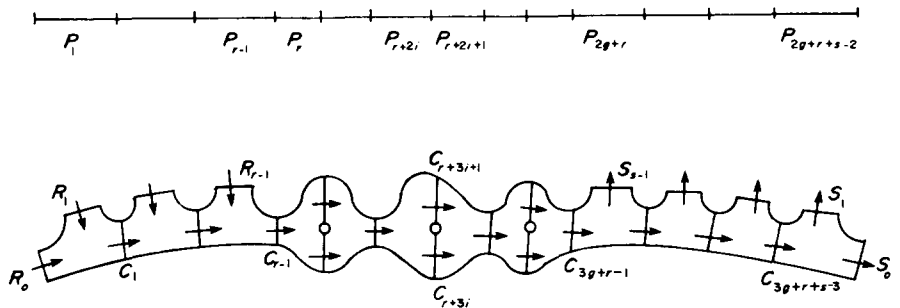
Réciproquement, pour tout triplet  $(g, r, s)$  d'entiers positifs ou nuls tel que  $2g + r + s \geq 3$  et que  $r$  et  $s$  soient non nuls si  $g$  est nul, nous allons définir un ou deux modèles canoniques. Un modèle associé à  $(g, r, s)$  est la donnée d'une surface  $M$  de genre  $g$  (le support du modèle), d'une décomposition de  $M$  en pantalons, et d'une orientation transverse des courbes de la décomposition ainsi que des composantes de  $\delta M$ , telle que  $M$  possède  $r$  bords rentrants et  $s$  bords sortants. Deux modèles sont considérés comme équivalents s'il existe un difféomorphisme entre les supports conjuguant les décompositions et respectant les orientations transverses. Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage orienté d'une surface  $M$ , toute décomposition de  $M$  transverse à  $\mathcal{F}$  définit un modèle.

Le premier modèle canonique  $\mathcal{M}_{g,r,s}$  est défini pour  $r \geq 1$  et  $s \geq 1$  et est représenté sur la Fig. 13 ci-dessous.

Si l'on veut donner de  $\mathcal{M}_{g,r,s}$  une définition rigoureuse, considérons une surface  $M_{g,r,s}$  de genre  $g$  dont le bord possède  $b = r + s$  composantes  $R_0, R_1, \dots, R_{r-1}, S_0, S_1, \dots, S_{s-1}$ . La décomposition  $\mathcal{D}_{g,r,s}$  de  $M_{g,r,s}$  est donnée par des courbes disjointes  $C_1, C_2, \dots, C_{3g+b-3}$  découpant  $M_{g,r,s}$  en  $2g + b - 2$  pantalons d'intérieurs disjoints  $P_1, P_2, \dots, P_{2g+b-2}$ , de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites:

- $\delta P_i = C_{i-1} \cup C_i \cup R_i \quad 2 \leq i \leq r-1$
- $\delta P_{r+2i} = C_{r+3i-1} \cup C_{r+3i} \cup C_{r+3i+1} \quad 0 \leq i \leq g-1$
- $\delta P_{r+2i+1} = C_{r+3i} \cup C_{r+3i+1} \cup C_{r+3i+2} \quad 0 \leq i \leq g-1$
- $\delta P_{2g+r+i} = C_{3g+r+i-1} \cup S_{s-1-i} \cup C_{3g+r+i} \quad 0 \leq i \leq s-3$
- $\delta P_1 = R_0 \cup R_1 \cup C_1$  si  $r > 1$
- $\delta P_{2g+r+s-2} = C_{3g+r+s-3} \cup S_1 \cup S_0$  si  $s > 1$

(si  $r$  ou  $s$  est égal à 1, ces conditions nécessitent quelques aménagements que nous ne détaillerons pas).



Le modèle  $\mathcal{M}_{g,r,s}$  (sur le dessin :  $g=3, r=4, s=5$ ).



ou

représente un pantalon;

les traits droits (traversés par une flèche) symbolisent les composantes du bord.

Fig. 13.

L'orientation transverse le long des composantes de  $\delta M$  est choisie de façon que les  $R_i$  ( $0 \leq i \leq r-1$ ) soient rentrants et les  $S_i$  ( $0 \leq i \leq s-1$ ) sortants. Si  $C_i$  ( $1 \leq i \leq 3g+b-3$ ) est une des courbes de la décomposition,  $C_i$  appartient à deux pantalons  $P_j$  et  $P_{j+1}$ , et l'orientation transverse le long de  $C_i$  est choisie de  $P_j$  vers  $P_{j+1}$ . On peut vérifier que la définition que nous venons de donner détermine effectivement un modèle à équivalence près.

Les composantes  $R_0, R_1, S_0, S_1$  de  $\delta M_{g,r,s}$  seront dites *primaires*.

Le second modèle canonique  $\mathcal{M}'_{g,r,s}$  est défini pour  $g \geq 1$ . Il est obtenu à partir de  $\mathcal{M}_{g-1,r+1,s+1}$  en recollant les composantes  $R_0$  et  $S_0$  de  $\delta \mathcal{M}_{g-1,r+1,s+1}$  et est représenté sur la Fig. 1 dans le cas d'une surface fermée ( $r = s = 0$ ). Son support  $M'_{g,r,s}$  est une surface de genre  $g$  possédant  $r$  bords rentrants  $R_1, \dots, R_r$  et  $s$  bords sortants  $S_1, \dots, S_s$ . La décomposition  $\mathcal{D}'_{g,r,s}$  associée à  $\mathcal{M}'_{g,r,s}$  possède  $3g+r+s-3$  courbes: les courbes  $C_1, \dots, C_{3g+r+s-4}$  provenant de  $\mathcal{D}_{g-1,r+1,s+1}$  et la courbe  $C_{3g+r+s-3}$  provenant de l'identification de  $R_0$  et de  $S_0$ .

Avec ces définitions, le résultat principal de ce paragraphe s'énonce comme suit:

**THÉORÈME 4.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté sans liaison d'une surface  $M$  différente de  $T^2$  ou  $S^1 \times I$  tel que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une transversale fermée. Soit  $g$  le genre de  $M$ , soit  $r$  le nombre de composantes rentrantes de  $\delta M$  et  $s$  le nombre de composantes sortantes. Il existe sur  $M$  une décomposition en pantalons  $\mathcal{D}$  telle que:*

—si toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  coupe  $\delta M$ , le modèle défini par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  est équivalent à  $\mathcal{M}_{g,r,s}$ .

—s'il existe une demi-feuille de  $\mathcal{F}$  ne coupant pas  $\delta M$  (en particulier si  $M$  est sans bord ou si  $\mathcal{F}$  possède une feuille compacte intérieure), le modèle défini par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  est équivalent à  $\mathcal{M}'_{g,r,s}$ .

Dans les deux cas, le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur chacun des pantalons découpés par  $\mathcal{D}$  est conjugué à  $\mathcal{F}_0$ .

En d'autres termes, il existe un difféomorphisme de  $M$  avec  $N$  ( $N$  étant la surface représentée à la Fig. 13, pour  $g, r$  et  $s$  convenablement choisis—avec éventuellement  $R_0$  et  $S_0$  identifiés) tel que le feuilletage orienté  $\mathcal{F}_N$  que  $\mathcal{F}$  définit sur  $N$  soit transverse aux  $3g+b-3$  courbes dessinées sur  $N$  et induise sur ces courbes ainsi que sur les composantes de  $\delta N$  l'orientation transverse symbolisée par les flèches. Sur chacun des  $2g+b-2$  pantalons déterminés sur  $N$ , le feuilletage induit par  $\mathcal{F}_N$  est conjugué à  $\mathcal{F}_0$ . Dans le deuxième cas, toute feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$  coupe la courbe de  $\mathcal{D}$  correspondant à  $R_0 = S_0$ , et toute demi-feuille non compacte coupe  $\mathcal{D}$  une infinité de fois.

**Remarque 7.** Comme le montre l'Exemple 3 ci-dessus, le résultat du Théorème 4.1 peut ne pas s'appliquer dès que  $\mathcal{F}$  possède une liaison. Mais dans ce cas on peut en général modifier  $\mathcal{F}$  par des opérations de Whitehead de façon à trouver un feuilletage  $\mathcal{G}$  auquel le résultat du Théorème 4.1 s'applique (voir [10]).

**Remarque 8.** Etant donné un modèle  $\mathcal{M}_{g,r,s}$  ou  $\mathcal{M}'_{g,r,s}$ , il existe toujours (cf. [15]) un feuilletage  $\mathcal{F}$  orienté sans feuille compacte intérieure ni liaison et une décomposition en pantalons  $\mathcal{D}$  transverse à  $\mathcal{F}$  tels que le modèle défini par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  soit équivalent au modèle donné.

**Remarque 9.** Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage orienté sans feuille compacte intérieure ni liaison d'une surface  $M$  de genre 0, le Théorème 4.1 entraîne que toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  rencontre  $\delta M$ , conformément au théorème de Poincaré–Bendixson.

*Remarque 10.* Pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  sans feuille compacte intérieure, dire que toute demi-feuille atteint  $\delta M$  signifie que toute feuille de  $\mathcal{F}^*$  est fermée dans  $M^*$ .

#### Démonstration du Théorème 4.1

LEMME 4.1. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté d'une surface  $M$ . Il existe (cf. Fig. 14) des courbes disjointes  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$  transverses à  $\mathcal{F}$  et des parties disjointes  $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$  de  $M$  telles que:

(1) Pour  $1 \leq i \leq m$ , la courbe  $\alpha_i$  sépare  $M$ , et  $X_i$  est l'adhérence d'une composante de  $M - \alpha_i$ .

(2) Pour  $1 \leq j \leq n$ , la courbe  $\beta_j$  sépare  $M$ , et  $Y_j$  est l'adhérence d'une composante de  $M - \beta_j$ .

(3) Pour  $1 \leq i \leq m$  (resp.  $1 \leq j \leq n$ ), il existe une décomposition de  $X_i$  (resp.  $Y_j$ ) transverse à  $\mathcal{F}|_{X_i}$  (resp.  $\mathcal{F}|_{Y_j}$ ) et définissant un modèle équivalent à  $M_{0, r_i, 1}$  (resp.  $M_{0, 1, s_j}$ );  $r_i$  (resp.  $s_j$ ) est un entier au moins égal à 2; en particulier toute composante de  $\delta X_i$  (resp.  $\delta Y_j$ ) différente de  $\alpha_i$  (resp.  $\beta_j$ ) est un bord rentrant (resp. sortant) de  $M$ .

(4) Si  $H$  désigne l'adhérence du complémentaire dans  $M$  de l'union des  $X_i$  et des  $Y_j$ , deux séparatrices opposées de  $\mathcal{F}|_H$  qui rencontrent  $\delta H$  ne rencontrent jamais deux composantes différentes de  $\delta H$ .

(5) Si de plus on se donne un bord rentrant  $R$  et un bord sortant  $S$  de  $M$ , on peut choisir les courbes  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  et les décompositions de  $X_i$  et  $Y_j$  de façon que  $R$  (resp.  $S$ ) ou bien appartienne à  $H$  ou bien appartienne à  $X_i$  (resp.  $Y_j$ ) et soit identifié à un bord primaire de  $M_{0, r_i, 1}$  (resp.  $M_{0, 1, s_j}$ ).

*Remarque 11.* La surface  $H$  définie dans la condition 4 est connexe.

#### Démonstration du Lemme 4.1

Montrons d'abord comment construire  $\alpha_1$ . S'il n'existe pas dans  $M$  deux séparatrices opposées provenant de deux bords rentrants différents, il n'y a rien à démontrer. Soient donc  $B_0$  et  $B_1$  deux composantes rentrantes distinctes de  $\delta M$  d'où partent deux séparatrices opposées (on choisit si possible  $B_0 = R$ ). En appliquant la technique exposée dans la démonstration du Théorème 2.1 (cf. Fig. 7), on construit un pantalon  $\mathcal{P}_1$  et une courbe  $\delta_1$  transverse à  $\mathcal{F}$ , tels que  $\delta \mathcal{P}_1 = B_0 \cup B_1 \cup \delta_1$ . S'il existe dans

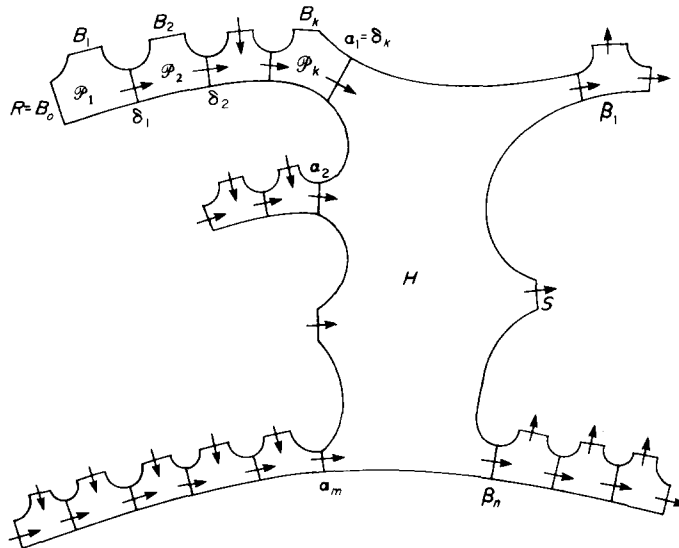


Fig. 14.



$\overline{M - \mathcal{P}_1}$  deux séparatrices opposées provenant l'une de  $\delta_1$  et l'autre d'un bord rentrant  $B_2$  différent de  $B_0$  ou  $B_1$ , nous construisons un pantalon  $\mathcal{P}_2$  et une courbe  $\delta_2$ , avec  $\delta\mathcal{P}_2 = \delta_1 \cup B_2 \cup \delta_2$ .

En répétant cette opération, on obtient des courbes disjointes  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  transverses à  $\mathcal{F}$  et des pantalons  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  d'intérieurs disjoints avec  $\delta\mathcal{P}_i = \delta_{i-1} \cup B_i \cup \delta_i$  ( $2 \leq i \leq k$ ),  $B_i$  étant une composante rentrante de  $\delta M$ . Appelons  $M_k$  l'adhérence de  $M - \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ . La construction s'arrête lorsque, pour toute séparatrice de  $\mathcal{F}_{|M_k}$  provenant de  $\delta_k$ , la séparatrice opposée ou bien ne provient pas de  $\delta M_k$  ou bien provient également de  $\delta_k$ . On pose alors  $\alpha_i = \delta_k$ ,  $X_1 = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ .

On construit maintenant par récurrences les  $\alpha_i$  et les  $X_i$  ( $2 \leq i \leq m$ ) en appliquant le procédé précédent à l'adhérence de  $M - \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j$  autant de fois que nécessaire. Les  $\mathcal{B}_j$  et les  $Y_j$  sont ensuite construits de façon analogue en considérant l'adhérence de  $M - \bigcup_{i=1}^m X_i$  et en renversant l'orientation de  $\mathcal{F}$ . Il est clair que les  $\alpha_i, \mathcal{B}_j, X_i, Y_j$  ainsi déterminés possèdent toutes les propriétés requises.  $\square$

Nous allons maintenant montrer le Théorème 4.1 dans le cas où toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  atteint  $\delta M$ . Appliquons le Lemme 4.1 et remarquons que dans ce cas  $\mathcal{F}_{|H}$  ne possède pas de feuille compacte intérieure et toute demi-feuille de  $\mathcal{F}_{|H}$  atteint  $\delta H$ .

Si  $H$  est difféomorphe à  $S^1 \times I$ , le théorème est prouvé.  $M$  est alors de genre 0.

Si  $H$  n'est pas un anneau, le Théorème 4.1 résulte immédiatement de la connexité de  $H$  et du lemme suivant (qui entraîne en particulier  $m = n = 1$ ):

**LEMME 4.2.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté sans feuille compacte intérieure ni liaison d'une surface  $M$  de genre  $g$ . Supposons que toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  rencontre  $\delta M$  et qu'il n'existe pas de séparatrices opposées rencontrant des composantes différentes de  $\delta M$ . Alors  $\delta M$  a deux composantes et, si  $M$  n'est pas un anneau, il existe une décomposition de  $M$  transverse à  $\mathcal{F}$  et définissant un modèle équivalent à  $\mathcal{M}_{g,1,1}$ .*

#### Démonstration du Lemme 4.2

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre  $q$  de selles de  $\mathcal{F}$ , qui est égal à  $2g - 2 + b$ , où  $b$  est le nombre de composantes de  $\delta M$  (remarquons que  $b$  est au moins égal à 2). Le lemme est vrai pour  $q = 0$ . Supposons le démontré pour  $q < q_0$  et considérons un feuilletage possédant  $q_0$  selles. Choisissons deux séparatrices opposées  $l$  et  $l'$  de  $\mathcal{F}$ . Elles rencontrent la même composante  $C$  de  $\delta M$  et on en déduit (cf. la démonstration du Théorème 2.1) un pantalon  $P$  contenant  $l, l'$  et  $C$ , dont le bord est transverse à  $\mathcal{F}$ .

Appelons  $C'$  et  $C''$  les composantes de  $\delta P$  autres que  $C$ . En considérant les deux séparatrices adjacentes à  $l$  et  $l'$ , on voit que, parce que  $\mathcal{F}$  ne possède pas de liaison, la surface  $M' = \overline{M - P}$  est *connexe*. Elle contient  $q_0 - 1$  selles et son bord possède au moins *trois* composantes (dont  $C'$  et  $C''$ ). Par hypothèse de récurrence,  $\mathcal{F}_{|M'}$  ne vérifie donc pas les hypothèses du lemme. La seule possibilité est qu'il existe dans  $M'$  deux séparatrices opposées rencontrant l'une  $C'$  et l'autre  $C''$ . Mais alors on peut construire un pantalon  $P'$  dont le bord (transverse à  $\mathcal{F}$ ) contient  $C'$  et  $C''$  (cf. Fig. 15), et il suffit maintenant d'appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\overline{M - (P \cup P')}$ .  $\square$

#### Fin de la démonstration du Théorème 4.1

Le Théorème 4.1 est prouvé dans le cas où toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  atteint  $\delta M$ . Supposons maintenant qu'il existe une demi-feuille de  $\mathcal{F}$  n'atteignant pas  $\delta M$ . On sait

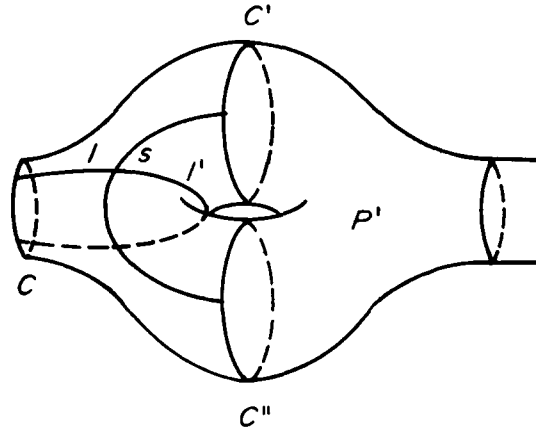


Fig. 15.

d'après le Corollaire 2.2 qu'il existe des familles *finies* de courbes disjointes transverses à  $\mathcal{F}$  telles que toute demi-feuille ne rencontrant pas  $\delta M$  coupe une des courbes de la famille. Parmi toutes ces familles, choisissons en une  $\mathcal{C} = (T_1, \dots, T_h)$  possédant le plus petit nombre d'éléments possible. De ce choix il résulte que, pour  $1 \leq i \leq h$ , la courbe  $T_i$  ne sépare pas  $M$  et n'est pas isotope à une composante de  $\delta M$ ; de plus, pour  $i \neq j$ ,  $T_i$  n'est pas isotope à  $T_j$ .

Considérons une composante  $M_0$  de la surface obtenue en découpant  $M$  selon les  $T_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ). Ce n'est pas un anneau parce que  $M$  est différente de  $T^2$  et que  $h$  est minimal. D'après la définition des  $T_i$ , toute demi-feuille du feuilletage  $\mathcal{F}^0$  induit par  $\mathcal{F}$  sur  $M_0$  rencontre  $\delta M_0$ , et on peut appliquer à  $\mathcal{F}^0$  le Théorème 4.1: il existe une décomposition  $\mathcal{D}_0$  sur  $M_0$  transverse à  $\mathcal{F}^0$  et un difféomorphisme  $\varphi$  de  $M_0$  sur un  $M_{g_0, r_0, s_0}$  conjuguant  $\mathcal{D}_0$  avec  $\mathcal{D}_{g_0, r_0, s_0}$  et respectant les orientations transverses.

A cause du choix de  $h$ , la surface  $M_0$  possède au moins un bord rentrant  $R$  et un bord sortant  $S$  qui proviennent par découpage de courbes  $T_u$  et  $T_v$  de  $\mathcal{C}$  (et non de composantes de  $\delta M$ ): si par exemple tous les bords rentrants de  $M_0$  proviennent de composantes de  $\delta M$ , il existe un bord sortant de  $M_0$  provenant d'une courbe  $T_i \in \mathcal{C}$  (car sinon  $M_0 = M$  et toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  rencontre  $\delta M$ ), et toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  rencontre  $\delta M$  ou une courbe de  $\mathcal{C} - T_i$ , ce qui contredit la minimalité de  $h$ . D'après la condition 5 du Lemme 4.1, on peut supposer que  $\varphi(R)$  et  $\varphi(S)$  sont des bords primaires de  $M_{g_0, r_0, s_0}$ ; par exemple  $\varphi(R) = R_0$  et  $\varphi(S) = S_0$ .

De la minimalité de  $h$ , il résulte que pour  $1 \leq i \leq r_0 - 1$  et  $1 \leq j \leq s_0 - 1$  les courbes  $\varphi^{-1}(R_i)$  et  $\varphi^{-1}(S_j)$  proviennent par découpage de composantes de  $\delta M$  et non de courbes de la famille  $\mathcal{C}$ : si par exemple  $\varphi^{-1}(R_i)$  provenait d'une courbe  $T_{w_i}$ , on pourrait remplacer dans  $\mathcal{C}$  les deux courbes  $T_u$  et  $T_{w_i}$  par la courbe de  $M$  qui a donné naissance à la courbe  $\varphi^{-1}(C_i)$ . Toujours d'après la minimalité de  $h$ , on voit que nécessairement  $u$  est égal à  $v$ , car sinon on pourrait supprimer  $T_v$  de  $\mathcal{C}$ . Ceci entraîne que  $h$  était en fait égal à 1 et achève de montrer le Théorème 4.1; la décomposition  $\mathcal{D}$  sur  $M$  s'obtient en ajoutant  $T_u$  aux courbes de  $M$  correspondant aux courbes de  $\mathcal{D}_0$ .  $\square$

## §5. APPLICATIONS

Dans cette section, nous établissons certaines conséquences du Théorème 4.1. Soit  $C_1, \dots, C_k$  une famille de courbes fermées simples d'une surface  $M$ . Ces courbes seront dites *isotopiquement distinctes* si  $C_i$  n'est jamais isotope à  $C_j$  pour  $i \neq j$ .

Du Théorème 4.1 on déduit immédiatement:

**COROLLAIRE 5.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orientable sans liaison ni feuille compacte d'une*

*surface sans bord  $M$ . Il existe une courbe fermée simple transverse à  $\mathcal{F}$  et coupant une infinité de fois toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$ .*

Et plus généralement:

**COROLLAIRE 5.2.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orientable sans liaison d'une surface  $M$  de genre  $g$  dont le bord possède  $b$  composantes. On suppose que toute feuille compacte intérieure de  $\mathcal{F}$  est coupée par une transversale fermée.*

—*si toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  rencontre  $\delta M$ , on peut trouver  $g + 1$  courbes disjointes, homologues, isotopiquement distinctes, transverses à  $\mathcal{F}$ , et rencontrant en exactement un point toute feuille régulière de  $\mathcal{F}$ .*

—*s'il existe une demi-feuille de  $\mathcal{F}$  ne rencontrant pas  $\delta M$ , on peut trouver  $g + b - 1$  courbes disjointes, homologues relativement à  $\delta M$ , isotopiquement distinctes, transverses à  $\mathcal{F}$ , et coupant toute demi-feuille ne rencontrant pas  $\delta M$ .*

**Remarque 12.** Les nombres  $g + 1$  et  $g + b - 1$  figurant dans l'énoncé du Corollaire 5.2 sont les plus grands possibles, en ce sens que toute famille de courbes disjointes, isotopiquement distinctes, et homologues (resp. homologues relativement à  $\delta M$ ), a au plus  $g + 1$  éléments (resp.  $g + b - 1$  éléments).

**Remarque 13.** Sous les hypothèses du Corollaire 5.2, on peut montrer le résultat plus précis suivant: toute famille de courbes vérifiant les conclusions du Corollaire 5.2. peut être complétée en une famille de  $g + 1$  courbes (resp.  $g + b - 1$  courbes) vérifiant encore ces conclusions.

Si toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$  coupe  $\delta M$ , toute feuille de  $\mathcal{F}$  est fermée dans  $M^*$  (rappelons que  $M^*$  désigne la surface obtenue en ôtant de  $M$  les singularités de  $\mathcal{F}$ ). D'autre part, même si  $\mathcal{F}$  possède des feuilles non fermées dans  $M^*$ , les feuilles du feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur le revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$  sont toutes fermées dans  $\tilde{M}^*$ . En fait, le Théorème 4.1 montre que l'on peut "fermer" les feuilles de  $\mathcal{F}$  en prenant un revêtement beaucoup plus petit que  $\tilde{M}$ :

**COROLLAIRE 5.3.** *Soit sur une surface  $M$  un feuilletage orientable  $\mathcal{F}$  sans liaison tel que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une transversale fermée. Il existe un revêtement infini cyclique  $\hat{M}$  de  $M$  tel que toutes les feuilles du feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\hat{M}$  soient fermées dans  $\hat{M}^*$ .*

Nous supposons dorénavant que la surface  $M$  est fermée (i.e.  $\delta M = \emptyset$ ) et de genre  $g \geq 2$ . Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté sans liaison ni feuille compacte de  $M$ . Nous voulons prouver que "presque toute feuille de  $\mathcal{F}$  ne passe pas trop souvent trop près des selles". Mais avant de pouvoir énoncer un résultat précis nous devons introduire quelques définitions.

D'après la section précédente, on sait qu'il existe une courbe  $C$  transverse à  $\mathcal{F}$  rencontrant toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$ , et on peut identifier  $M$  à  $M'_{g,0,0}$  de façon que  $C$  soit identifiée à  $R_0 = S_0$ ; on définit ainsi  $2g - 2$  pantalons  $P_1, \dots, P_{2g-2}$  sur  $M$ . Soit  $x$  un point de  $C$  tel qu'en parcourant dans le sens positif à partir de  $x$  la feuille contenant  $x$  on n'aboutisse pas à une selle. La demi-feuille positive  $L_x$  issue de  $x$  traverse alors successivement les pantalons  $P_1, \dots, P_{2g-2}, P_1, P_2, \dots$  et les bords de ces pantalons déterminent sur  $L_x$  des points  $x_i$  ( $i \geq 0, x_0 = x$ ) tels que l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  de  $L_x$  soit contenu dans  $P_{k(i)}$ ,  $k(i)$  étant congru à  $i + 1$  modulo  $2g - 2$ . Choisissons maintenant sur  $M$  une métrique riemannienne. Pour tout entier  $i \geq 0$ , on appelle  $d_i(x)$  la distance de  $[x_i, x_{i+1}]$

à la selle  $s_{k(i)}$  contenue dans  $P_{k(i)}$ . La suite des  $d_i(x)$  définit à quel point  $L_x$  passe près des selles.

Nous choisissons maintenant un champ de vecteurs  $X$  définissant le feuilletage  $\mathcal{F}$ , c'est à dire tangent à  $\mathcal{F}$  en tout point régulier de  $\mathcal{F}$  et compatible avec l'orientation de  $\mathcal{F}$ . Ce champ s'annule précisément aux selles de  $\mathcal{F}$ , et la seule restriction que nous plaçons sur  $X$  est que ces zéros soient des zéros génériques de  $X$  (i.e. il existe au voisinage des selles un système de coordonnées dans lequel le champ s'écrit  $X(x, y) = (-ax, by)$ , avec  $a > 0$  et  $b > 0$ ).

$X$  détermine sur  $M$  un flot  $\varphi_t$ , et pour tout point  $x$  de  $C$  (sauf un nombre fini) il existe un plus petit nombre  $h(x) > 0$  tel que  $\varphi_{h(x)}(x) \in C$ . Le nombre  $h(x)$  est appelé le *temps de premier retour* et la formule  $T(x) = \varphi_{h(x)}(x)$  détermine une application  $T$  de  $C$  dans  $C$  appelée *application de premier retour* ( $T$  est définie sauf en un nombre fini de points et son image est  $C$  privé d'un nombre fini de points). En dehors d'un nombre fini de points  $a_1, \dots, a_n$  où elles ne sont pas définies, les fonctions  $h$  et  $T$  sont continues (et même différentiables si  $\mathcal{F}$  l'est); lorsque le point  $x \in C$  tend vers l'un des points  $a_i$ , le temps de retour  $h(x)$  tend vers  $+\infty$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}$  étant fixé, la fonction  $h$  dépend du champ  $X$  choisi, mais la fonction  $T$  n'en dépend pas.

Considérons maintenant les *mesures positives* définies sur  $C$ ; parmi elles on peut distinguer celles qui sont invariantes par  $T$  et pour lesquelles la fonction  $h$  est intégrable. Ces mesures sont nécessairement sans atome et de masse totale finie.

Le champ  $X$  étant fixé, il existe une correspondance naturelle entre l'ensemble  $\mathcal{M}$  des mesures positives de masse totale finie sur  $M$  qui sont invariantes par  $\varphi_t$  et ne possèdent pas de composante sur les mesures de Dirac (i.e. pour toute selle  $s$  de  $\mathcal{F}$  la mesure de  $\{s\}$  est nulle), et l'ensemble  $\tilde{\mathcal{M}}$  des mesures positives  $T$ -invariantes sur  $C$  pour lesquelles  $h$  est intégrable: si  $\mu \in \mathcal{M}$ , on définit une mesure  $\tilde{\mu}$  sur  $C$  en posant pour toute partie mesurable  $A$  de  $C$ :  $\tilde{\mu}(A) = (1/\epsilon)\mu(\{\varphi_s(x); x \in A; 0 \leq s \leq \epsilon\})$  pour  $\epsilon$  positif petit; les masses totales de  $\mu$  et de  $\tilde{\mu}$  sont reliées par la formule  $|\mu| = \int_C h \, d\tilde{\mu}$ .

**THÉOREME 5.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté sans liaison ni feuille compacte d'une surface fermée  $M$  différente de  $T^2$ , et  $C$  une courbe transverse rencontrant toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$ . Il existe un nombre positif  $K$  et un ensemble  $Z$  contenu dans  $C$  tels que:*

—  *$Z$  est de mesure nulle par rapport à toute mesure positive  $T$ -invariante pour laquelle  $h$  est intégrable.*

— *pour tout point  $x$  de  $C$  n'appartenant pas à  $Z$ , les nombres  $d_i(x)$  sont définis et*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \prod_{i=0}^n \frac{1}{d_i(x)} \right)^{1/n} \leq K.$$

#### Remarque 14

—Le Théorème 5.1 s'étend au cas où  $\mathcal{F}$  possède des feuilles compactes si chacune de ces feuilles est coupée par une transversale fermée.

—La fonction  $h$  dépend du champ  $X$  choisi, mais pour une mesure  $\tilde{\mu}$  donnée l'appartenance de  $h$  à  $L^1(\tilde{\mu})$  n'en dépend pas, pourvu que l'on se restreigne aux champs dont les zéros sont génériques.

— $d_i(x)$  est calculé par rapport à une métrique riemannienne quelconque définie sur  $M$ , mais la constante  $K$  dépend de la métrique (si par exemple on multiplie la métrique par une constante  $\lambda$ , on peut remplacer  $K$  par  $K/\lambda$ ).

—Il est facile de voir que  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \prod_{i=0}^n (1/d_i(x))^{1/n} \right)$  est toujours strictement positif.

—Si  $\mathcal{F}$  est défini par une 1-forme différentielle fermée  $\omega$ , on peut montrer que pour la mesure "de Lebesgue" définie par  $\omega$  la fonction  $h$  est toujours intégrable.

### Démonstration du Théorème 5.1

A toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}$  de masse totale 1, on peut associer [14] un cycle *asymptotique*  $\gamma(\mu)$  dans  $H_1(M, \mathbb{R})$ . Ce cycle est en fait le dual (au sens de Poincaré) de la classe de cohomologie déterminée par  $\tilde{\mu}$  ( $\tilde{\mu}$ , étant  $T$ -invariante, définit une mesure transverse à  $\mathcal{F}$  invariante par holonomie, et à une telle mesure est associée canoniquement une classe de cohomologie, cf. par exemple [12]). En particulier la masse totale de  $\tilde{\mu}$  est égale au nombre d'intersection de  $\gamma(\mu)$  et de  $C$  (on choisit sur  $C$  une orientation, ce qui permet de considérer  $C$  comme un cycle de  $H_1(M, \mathbb{Z})$ , puis on oriente  $M$  de façon que l'intersection des feuilles de  $\mathcal{F}$  avec  $C$  soit toujours positive); ce nombre d'intersection est donc *strictement positif*.

On sait d'autre part qu'il n'existe sur  $C$  qu'un nombre *fini* de mesures de probabilité (i.e. de masse 1) invariantes par  $T$  et *ergodiques* (ce résultat a été démontré par Katok [8] et par Keane [9] dans le cas où  $\mathcal{F}$  est défini par une forme fermée, puis généralisé par Stredder [15]; nous en donnerons une démonstration dans [10]). Il existe donc dans  $\mathcal{M}$  un nombre fini  $\mu_1, \dots, \mu_e$  de mesures de probabilité ergodiques. On peut ainsi trouver un nombre  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\mu_i$  ( $1 \leq i \leq e$ ) on ait  $\gamma(\mu_i) \cdot C \geq \epsilon$ .

A tout point quasi-régulier  $x \in M$  (cf. [14]) on peut associer une mesure de probabilité  $\mu_x$  sur  $M$  (invariante par  $\varphi_t$ ) par la formule  $\int f d\mu_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} (1/T) \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt$ . Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}$ , l'ensemble des points de  $M$  qui ne sont pas quasi-réguliers est  $\mu$ -négligeable. Les mesures  $\mu_i$  ( $1 \leq i \leq e$ ) étant ergodiques, on sait de plus que, pour  $i$  fixé, l'ensemble des points de  $M$  pour lesquels  $\mu_x \neq \mu_i$  est  $\mu_i$ -négligeable (cf. [4]). Il existe donc dans  $M$  un ensemble  $Z_0$ ,  $\mu_i$ -négligeable pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq e$ ), tel que, si  $x$  n'est pas dans  $Z_0$ ,  $\mu_x$  soit défini et égal à l'un des  $\mu_i$ .

Toute mesure de probabilité dans  $\mathcal{M}$  appartenant à l'enveloppe convexe de l'ensemble formé par les  $\mu_i$  (cf. [4]), on voit que  $Z_0$  est  $\mu$ -négligeable pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}$ . L'intersection  $Z = Z_0 \cap C$  est donc  $\tilde{\mu}$ -négligeable pour toute mesure  $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathcal{M}}$ , et nous avons montré qu'il existe un nombre  $\epsilon > 0$  tel que, pour tout  $x \in C - Z$ ,  $\mu_x$  est défini et  $\gamma(\mu_x) \cdot C \geq \epsilon$ . Remarquons que, pour  $x \in C - Z$ , la demi-feuille positive  $L_x$  n'aboutit pas à une selle car alors  $\mu_x$  serait une masse de Dirac en cette selle.

Nous devons maintenant utiliser l'interprétation géométrique du cycle  $\gamma(\mu_x)$ . Soit  $x \in C - Z$ . On a défini plus haut des points  $x_i$  ( $i \geq 0$ ), et on en déduit des nombres positifs  $t_i(x)$  ( $i \geq 0$ ) par la formule  $x_i = \varphi_{t_i(x)}(x)$ . Considérons le morceau de  $L_x$  allant de  $x$  à  $x_{k\lambda}$  ( $\lambda$  est un entier positif quelconque,  $k$  désigne le nombre fixe  $2g - 2$ ), et rajoutons lui un arc simple de  $C$  de manière à obtenir une courbe fermée (pas forcément simple). Cela définit un cycle  $A_\lambda(x)$  et l'on sait [14] que  $\gamma(\mu_x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (A_\lambda(x)/t_{k\lambda}(x))$ . Mais par construction le nombre d'intersection de  $A_\lambda(x)$  avec  $C$  est égal à  $\lambda$ , et par conséquent pour tout  $x \in C - Z$  la suite  $(\lambda/t_{k\lambda}(x))$  converge quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  vers un nombre supérieur ou égal à  $\epsilon$ .

En utilisant le fait que les zéros de  $X$  sont génériques, on voit que, pour  $d_i$  petit, le nombre  $t_{i+1} - t_i$  est "équivalent" à  $\log(1/d_i)$ . Plus précisément, il existe une constante  $K'$  telle que  $\log(1/d_i(x)) \leq K' \cdot (t_{i+1}(x) - t_i(x))$  pour tout  $i \geq 0$  et tout  $x \in C$  (tel que  $L_x$  n'aboutisse pas à une selle). On en déduit  $\log \prod_{i=0}^{k\lambda-1} (1/d_i(x)) \leq K' \cdot t_{k\lambda}(x)$ , et le théorème découle facilement de cette inégalité et de ce qui précède.  $\square$

### §6. FEUILLETAGES ET ECHANGES D'INTERVALLES

Nous voulons exposer ici les relations de base qui existent entre les feuilletages des surfaces et certaines applications du cercle dans lui-même appelées *échanges d'intervalles* (notre définition des échanges d'intervalles—voir ci-dessous—est plus

générale que celle de [9] qui impose aux échanges d'intervalles de préserver la mesure de Lebesgue).

Considérons d'abord les homéomorphismes. Etant donné un homéomorphisme du cercle, on peut définir sa *suspension*. C'est un feuilletage (non singulier) orienté du tore  $T^2$  tel qu'il existe une courbe transverse sur laquelle l'application de premier retour soit l'homéomorphisme donné. Cette suspension est bien définie à conjugaison près, et tout feuilletage de  $T^2$  sans composante de Reeb (c'est à dire tel que toute feuille compacte soit coupée par une transversale fermée) peut être considéré comme la suspension d'un homéomorphisme du cercle.

Si maintenant nous considérons sur une surface fermée de genre  $g \geq 2$  un feuilletage orienté dont les singularités sont des selles de Morse, l'application de premier retour induite sur une transversale fermée possédera un nombre fini de points de discontinuité, correspondant aux points dont la feuille aboutit à une selle sans retraverser la transversale considérée. Nous devons donc considérer sur le cercle non plus les homéomorphismes, mais les "homéomorphismes discontinus".

Soit  $C$  un cercle orienté. Un *échange d'intervalles* sur  $C$  est défini par  $n$  points distincts  $a_1, \dots, a_n$  placés dans cet ordre sur  $C$ ,  $n$  points distincts  $b_1, \dots, b_n$  placés dans cet ordre, et un homéomorphisme  $\varphi$  préservant l'orientation de  $C - \{a_1, \dots, a_n\}$  avec  $C - \{b_1, \dots, b_n\}$ . La restriction de  $\varphi$  à un intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  est ainsi un homéomorphisme croissant de  $]a_i, a_{i+1}[$  avec un intervalle  $]b_{\tau(i)}, b_{\tau(i)+1}[$  (la numérotation des points est cyclique:  $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$ ). Appelons  $A$  l'ensemble (à  $n$  éléments) des intervalles  $]a_i, a_{i+1}[$  et  $B$  celui des intervalles  $]b_j, b_{j+1}[$ ; l'application  $i \mapsto ]a_i, a_{i+1}[$  (resp.  $j \mapsto ]b_j, b_{j+1}[$ ) identifie  $A$  et  $B$  à  $\{1, \dots, n\}$ , mais nous préférons considérer les ensembles  $A$  et  $B$  plutôt que  $\{1, \dots, n\}$  pour bien montrer que la permutation  $\sigma_\varphi$  définie plus loin ne dépend que de  $\varphi$ , et non du choix des points  $a_1$  et  $b_1$ .

Sur  $A$  et  $B$  sont définies des permutations circulaires  $c_A$  et  $c_B$  ( $c_A(]a_i, a_{i+1}[) = ]a_{i+1}, a_{i+2}[$ , et de même pour  $c_B$ ). D'autre part  $\varphi$  définit une application  $\tau$  de  $A$  dans  $B$ , et nous appellerons *permutation indicatrice* de  $\varphi$  la permutation  $\sigma_\varphi$  de  $A$  définie par  $\sigma_\varphi = c_A^{-1} \circ \tau^{-1} \circ c_B \circ \tau$  (nous considérerons également  $\sigma_\varphi$  comme une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ ). Nous utiliserons pour étudier le feuilletage suspension de  $\varphi$  la décomposition de  $\sigma_\varphi$  en un produit de cycles à supports disjoints; notons que  $\sigma_\varphi$  ne possède pas de point fixe si tous les points  $a_i$  sont de véritables points de discontinuité de  $\varphi$  (i.e.  $\varphi$  ne peut pas se prolonger par continuité en  $a_i$ ). Sans perte de généralité nous pouvons nous restreindre aux échanges d'intervalles possédant cette propriété.

Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage orienté et  $C$  une transversale coupant toute demi-feuille, l'application de premier retour sur  $C$  est un échange d'intervalles. Réciproquement, nous allons associer un feuilletage-suspension à tout échange d'intervalles, puis nous montrerons que tout feuilletage orienté possédant une transversale coupant toute demi-feuille peut se ramener par un nombre fini d'opérations simples à un feuilletage suspension.

Pour définir canoniquement la suspension d'un échange d'intervalles, nous devons élargir la classe des feuilletages que nous considérons; pour cela, définissons un *feuilletage généralisé* comme un feuilletage dont les singularités sont des selles pouvant posséder un nombre pair quelconque (au moins égal à quatre) de séparatrices. On définit les demi-feuilles, feuilles, cycles de feuilles et liaisons comme pour un feuilletage (cf. Préliminaires).

Nous pouvons maintenant introduire la suspension d'un échange d'intervalles par la proposition suivante:

**PROPOSITION 6.1.** *Soit  $\varphi$  un échange d'intervalles défini sur un cercle  $C$ . Il existe un feuilletage généralisé  $\mathcal{F}_\varphi$  défini sur une surface fermée  $M_\varphi$  et un plongement  $i_\varphi$  de  $C$*

dans  $M_\varphi$  tels que:

— $i_\varphi(C)$  est transverse à  $\mathcal{F}_\varphi$  et rencontre toute demi-feuille de  $\mathcal{F}_\varphi$ , ainsi que toute liaison.

—l'application de premier retour induite par  $\mathcal{F}_\varphi$  sur  $i_\varphi(C)$  s'identifie à  $\varphi$ .

Ces conditions déterminent  $\mathcal{F}_\varphi$  à conjugaison près: si on se donne un feuilletage généralisé orienté  $\mathcal{F}$  d'une surface  $M$  et un plongement  $i$  de  $C$  dans  $M$  satisfaisant ces conditions, il existe un homéomorphisme  $\theta$  de  $M_\varphi$  avec  $M$  conjuguant  $\mathcal{F}_\varphi$  avec  $\mathcal{F}$  et tel que  $i = \theta \circ i_\varphi$ .

De plus les selles de  $\mathcal{F}_\varphi$  correspondent bijectivement aux cycles de  $\sigma_\varphi$ , une selle à  $2k$  séparatrices de  $\mathcal{F}_\varphi$  correspondant à un cycle de longueur  $k$  de  $\sigma_\varphi$ . Le genre  $g$  de  $M$  est donné par la formule  $2g - 2 = n - c(\sigma_\varphi)$ ,  $n$  étant le nombre de points de discontinuité de  $\varphi$  et  $c(\sigma_\varphi)$  le nombre de cycles de  $\sigma_\varphi$ . Pour  $n$  donné,  $g$  peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre  $(n/4) + 1$  et  $(n + 1)/2$ .

### Démonstration de la Proposition 6.1

Supposons que la suspension existe, et découpons  $M$  selon  $i_\varphi(C)$ . Puis découpons la surface obtenue selon toutes les séparatrices. Des hypothèses faites sur  $i_\varphi(C)$  et du Lemme 3.1, il résulte que toute composante de la surface (anguleuse) ainsi obtenue est un disque muni d'un feuilletage conjugué au feuilletage représenté à la Fig. 16. Cette remarque montrera que la suspension (si elle existe) est unique, car elle s'obtient nécessairement par la construction que nous allons maintenant décrire.

Soit  $\varphi: C = \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow C - \{b_1, \dots, b_n\}$  un échange d'intervalles. Partons de  $n$  disques  $D_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) identiques à celui représenté à la Fig. 16 et recollons-les selon le schéma suivant:—le bord supérieur  $\tilde{a}_{i+1}s_i$  de  $D_i$  est recollé au bord inférieur  $\tilde{a}_{i+1}s_i$  de  $D_{i+1}$  (ce qui justifie les notations).—le bord supérieur  $s_i u_i$  de  $D_i$  est recollé au bord inférieur  $s_{j-1} v_j$  de  $D_j$ , où  $j$  est défini par  $\tau(j) = \tau(i) + 1$ .

Nous obtenons ainsi un feuilletage généralisé orienté sans liaison sur une surface dont le bord possède deux composantes, l'une rentrante et l'autre sortante. Choisissons un plongement  $i_\varphi$  qui identifie  $C$  à la composante rentrante de façon que  $i_\varphi(a_i) = \tilde{a}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Il ne reste plus maintenant qu'à recoller les deux composantes du bord de la surface pour que l'application de premier retour induite sur  $C$  soit l'échange d'intervalles  $\varphi$  donné. Cela est possible car sur  $C$  l'ordre des points  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est le même que celui des points  $b_{\tau(i)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), et le feuilletage ainsi obtenu vérifie toutes les conditions requises.

La correspondance entre selles de  $\mathcal{F}_\varphi$  et cycles de  $\sigma_\varphi$  provient du fait que la selle  $s_i$  de  $D_i$  a été identifiée à la selle  $s_{j-1}$  de  $D_j$ , avec  $j - 1 = \sigma_\varphi(i)$ . La formule donnant le genre de  $M_\varphi$  s'obtient alors en remarquant que la caractéristique d'Euler d'une surface fermée de genre  $g$  est  $2 - 2g$  et que, pour un champ de vecteurs définissant  $\mathcal{F}_\varphi$ , une selle à  $2k$  séparatrices correspond à un zéro d'index  $1 - k$ .

La valeur extrême  $g = (n/4) + 1$  correspond au cas où  $\sigma_\varphi$  est un produit de transpositions à supports disjoints, c'est à dire où toutes les selles de  $\mathcal{F}_\varphi$  ont quatre

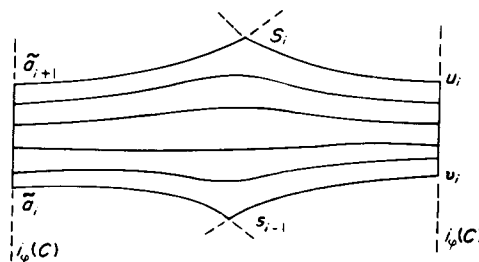


Fig. 16.

séparatrices; la valeur  $g = (n + 1)/2$  est atteinte lorsque  $\sigma_\varphi$  est une permutation circulaire, c'est à dire lorsque  $\mathcal{F}_\varphi$  possède une seule selle (à  $2n$  séparatrices).  $\square$

*Remarque 15.* La suspension d'un échange d'intervalles est déjà connue (Katok), mais par une construction légèrement différente de la nôtre. Par contre la formule donnant le genre de  $M_\varphi$  ne l'est à ma connaissance pas.

*Remarque 16.* L'étude des échanges d'intervalles peut être facilitée par la considération de leur suspension. Ainsi les résultats de l'article de Keane[9] deviennent-ils presque évidents si on les traduit en termes de 1-formes différentielles fermées par passage d'un échange d'intervalles à sa suspension (les échanges d'intervalles de Keane préservent la mesure de Lebesgue, et donc leur suspension peut être définie par une forme fermée).

Considérons maintenant sur une surface fermée un feuilletage  $\mathcal{F}$  (non généralisé: toutes les selles de  $\mathcal{F}$  ont quatre séparatrices) orienté sans liaison tel que toute feuille compacte soit coupée par une transversale fermée. D'après le Théorème 4.1, il existe alors une courbe  $C$  transverse à  $\mathcal{F}$  rencontrant toute demi-feuille, et d'après la Proposition 6.1  $\mathcal{F}$  s'identifie à la suspension d'un échange d'intervalles—celui que  $\mathcal{F}$  induit sur  $C$ . Si on suppose seulement que  $\mathcal{F}$  est un feuilletage généralisé orienté possédant une courbe transverse  $C$  rencontrant toute demi-feuille, on va se ramener à un "feuilletage suspension" par un certain nombre d'opérations simples.

Si d'abord tout cycle de feuilles de  $\mathcal{F}$  est coupé par  $C$ , le 1-complexe dont les arêtes sont les séparatrices de type 2 ne rencontrant pas  $C$  ne possède que des composantes contractiles, et on peut *écraser* ces composantes de façon à obtenir un feuilletage généralisé dont toutes les liaisons rencontrent  $C$  (cf. Fig. 17). D'après la Proposition 6.1, le feuilletage ainsi obtenu est la suspension d'un échange d'intervalles.

Si au contraire il existe un cycle de feuilles ne rencontrant pas  $C$ , remarquons que ce cycle ne peut pas être presque transverse (car une transversale fermée rencontrant toute demi-feuille rencontre aussi tout cycle presque transverse). On peut alors couper  $M$  selon ce cycle de feuilles et écraser en un point chaque composante du bord de la surface obtenue (cf. Fig. 18), de façon à obtenir un feuilletage généralisé d'une surface (connexe) dont le genre est d'une unité plus petit que celui de  $M$ : si du cycle de feuilles partaient  $p$  séparatrices d'un côté et  $q$  de l'autre, on a remplacé le cycle par une selle à  $p$  séparatrices et une selle à  $q$  séparatrices;  $p$  et  $q$  sont pairs car  $\mathcal{F}$  est orientable, et au moins égaux à 2 car le cycle n'est pas presque transverse; une selle à 2 séparatrices doit dans cette construction être considérée comme un point régulier (cf. Fig. 18b).

En répétant cette opération de *coupure selon un cycle de feuilles*, on se ramène au cas où  $C$  coupe tout cycle de feuilles. On a ainsi prouvé le résultat suivant:

**PROPOSITION 6.2.** *Soit  $M$  une surface fermée et  $\mathcal{F}$  un feuilletage orientable de  $M$ . —si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage à selles de Morse sans liaison et si toute feuille compacte*

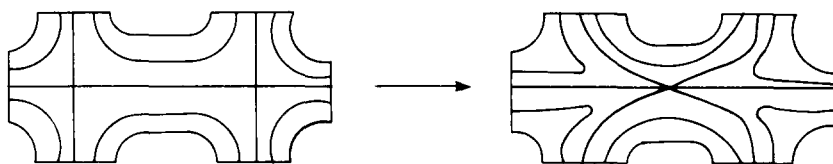


Fig. 17.



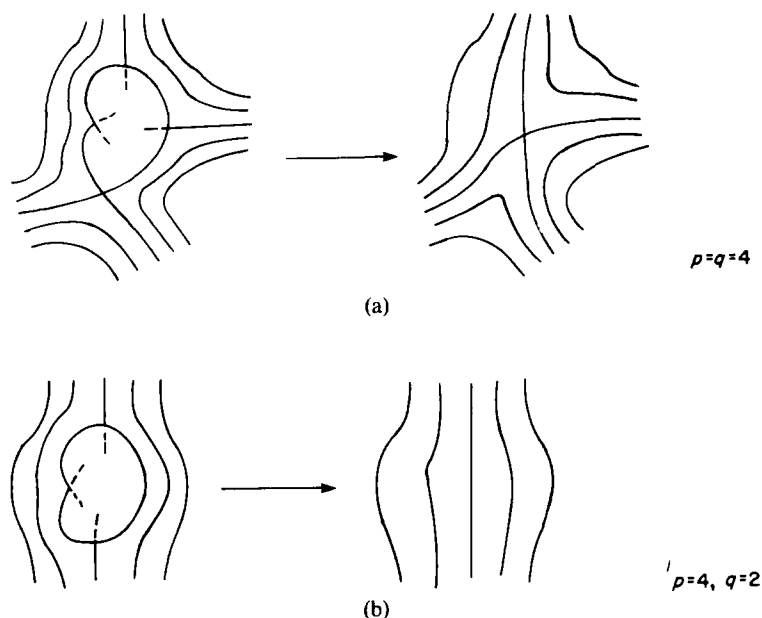


Fig. 18.

est coupée par une transversale fermée,  $\mathcal{F}$  peut être considéré comme la suspension d'un échange d'intervalles.

—si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage généralisé et s'il existe un courbe transverse à  $\mathcal{F}$  rencontrant toute demi-feuille, on peut par des “coupures selon des cycles de feuilles” et par un “écrasement de Whitehead” transformer  $\mathcal{F}$  en la suspension d'un échange d'intervalles.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. V. I. ARNOLD: Small denominators I. *Transl. AMS* **46** (1965), 213–284.
2. T. M. CHERRY: Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus. *Proc. London Math. Soc.* **44** (1937), 175–215.
3. A. DENJOY: Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures et Appl.* **11** (1932), 333–375.
4. DENKER, GRILLENBERGER et SIGMUND: Ergodic theory on compact spaces. Springer Lecture Notes **527** (1976).
5. FATHI, LAUDENBACH et POENARU: Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque* (1979), 66–67 SMF Paris.
6. Proposition 10: Exposé 3, de [5].
7. M. HERMAN: Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. IHES* **49** (1979), 5–234.
8. A. B. KATOK: Invariant measures of flows on oriented surfaces. *Soviet Math. Dokl.* **14**(4) (1973), 1104–1108.
9. M. KEANE: Interval exchange transformations. *Math. Z.* **141** (1975), 25–31.
10. G. LEVITT: Feuilletages des surfaces. *Ann. Inst. Fourier* **32**(2) (1982).
11. M. M. PEIXOTO: Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* **1** (1962), 101–120.
12. J. F. PLANTE: Foliations with measure-preserving holonomy. *Ann. of Math.* **102** (1975), 327–361.
13. R. ROUSSARIE: Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie. *Publ. Math. IHES* **43** (1974), 101–141.
14. S. SCHWARTZMAN: Asymptotic cycles. *Ann. of Math.* **66** (1957), 270–284.
15. P. J. STREDDER: Morse foliations. Thesis, Warwick (1976).
16. W. P. THURSTON: On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. Preprint.

Université Paris 7  
France