TOPOLOGIE. — *Propriétés homologiques des feuilletages des surfaces.* Note (*) de **Gilbert Levitt,** présentée par Henri Cartan.

Après avoir introduit le nombre d'intersection d'une classe d'homologie entière avec une mesure transverse d'un feuilletage, nous le calculons en fonction des cycles asymptotiques du feuilletage. Cela conduit à définir pour un feuilletage orientable la notion de connexité, et à généraliser aux feuilletages non orientables la notion de cycle asymptotique. Cette étude est ensuite appliquée aux « feuilletages mesurés » et aux difféomorphismes pseudo-Anosov.

After introducing the intersection number of an integral homology class with a transverse measure for a foliation, we compute it in terms of the asymptotic cycles of the foliation. This study leads to the definition of a "connected" orientable foliation, and to the generalization of asymptotic cycles to non-orientable foliations. Applications to "measured foliations" and pseudo-Anosov diffeomorphisms are also given.

Dans cette Note, nous considérons une surface fermée orientée M de genre $g \geqq 2$, et des feuilletages $\mathscr{F}$ sur M dont les singularités sont des selles. Pour simplifier l'énoncé des résultats, nous nous restreindrons ici aux feuilletages dont les feuilles non compactes sont denses dans un ouvert non vide; ce sont les feuilletages sous-jacents aux « feuilletages mesurés » (au sens de [1] et [11]). Signalons toutefois que nous considérerons toutes les mesures transverses d'un tel feuilletage, sans restriction sur leur support.

Soit μ une mesure transverse de $\mathscr{F}$, et $\alpha \in H_1(M, Z)$ une classe d'homologie non nulle. Nous définissons le *nombre d'intersection* $i(\mathscr{F}, \mu; \alpha)$ [ou simplement $i(\mu; \alpha)$] comme la borne inférieure de l'ensemble des nombres :

$$i(\mu; C_1)+i(\mu; C_2)+\ldots+i(\mu; C_n),$$

où $C_1, \ldots, C_n$ sont des courbes fermées simples orientées dont l'union représente α, et $i(\mu; C_i)$ désigne la masse totale déposée par μ sur C_i. Pour $\alpha=0$, nous posons $i(\mu; \alpha)=0$.

Si par exemple $(\mathscr{F}, \mu)$ est le feuilletage (mesuré) défini par une 1-forme différentielle fermée ω, on a $i(\mu; \alpha) \geqq |[\omega](\alpha)|$ pour toute classe α (le symbole $[\omega]$ désigne la classe de cohomologie de ω). Cette inégalité est une égalité si α peut être représentée par une courbe fermée simple transverse à $\mathscr{F}$ (par convention, une courbe transverse ne passe par aucune selle de $\mathscr{F}$). Si par contre $(\mathscr{F}, \mu)$ est le feuilletage stable d'un difféomorphisme pseudo-Anosov induisant l'identité sur $H_1(M, Z)$, il est facile de vérifier que l'on a $i(\mu; \alpha)=0$ pour toute classe α. Nous verrons en fait dans la section III que cette annulation de $i(\mu; \alpha)$ se produit pour presque tout feuilletage non orientable $(\mathscr{F}, \mu)$.

I. Feuilletages orientables. — Dans cette section, nous ne considérons que des feuilletages orientables (i. e. pouvant être définis par un champ de vecteurs, ou par une forme fermée). Deux tels feuilletages seront dits *équivalents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une isotopie et des opérations de Whitehead ([1], [11]) ne faisant intervenir que des feuilletages orientables.

Un feuilletage orientable peut être transversalement orienté; une mesure transverse μ détermine alors une classe de cohomologie $[\mu] \in H^1(M, R)$, et on a encore $i(\mu; \alpha) \geqq |[\mu](\alpha)|$ pour toute classe $\alpha \in H_1(M, Z)$, avec égalité si α contient une courbe transverse. La première étape dans le calcul de $i(\mu; \alpha)$ va donc être la détermination des classes d'homologie représentables par une courbe transverse. Nous pouvons nous limiter aux classes α représentables par une courbe fermée simple, c'est-à-dire aux éléments indivisibles du groupe $H_1(M, Z)$.

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orienté sans cycle de feuilles. Pour toute classe indivisible $\alpha \in H_1(M, Z)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la classe α peut être représentée par une courbe fermée simple transverse à un feuilletage $\mathcal{G}$ équivalent à $\mathcal{F}$;*

(ii) *pour toute mesure transverse μ, le nombre $[\mu](\alpha)$ est non nul;*

(iii) *la classe de cohomologie duale de α contient une forme fermée définissant un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$ (au sens de* [1], [4] *ou* [11]);

(iv) *il existe pour un feuilletage équivalent à $\mathcal{F}$ une « décomposition canonique en pantalons » dont $g-1$ courbes appartiennent à α (voir* [3], figure 1 et paragraphe 4, pour les décompositions canoniques « en collier »).

On notera que la détermination des classes d'*isotopie* de courbes fermées simples qui contiennent des courbes transverses est un problème très délicat qui n'admet probablement pas de solution explicite.

Lorsque $\mathcal{F}$ possède des feuilles compactes (et donc des cycles de feuilles), il n'existe pas forcément de classes α vérifiant (ii), (iii) ou (iv). Pour le théorème suivant, nous désignons par $\bar{\gamma}$ la classe d'homologie entière déterminée par une feuille compacte γ d'un feuilletage orienté.

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orienté. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une courbe fermée simple transverse à un feuilletage $\mathcal{G}$ équivalent à $\mathcal{F}$, et rencontrant toute feuille de $\mathcal{G}$.*

(2) *Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ sont des feuilles compactes de $\mathcal{F}$, la somme $\bar{\gamma}_1 + \ldots + \bar{\gamma}_k$ est non nulle dans* $H_1(M, Z)$.

(3) *Il existe une forme fermée transverse à un feuilletage $\mathcal{G}$ équivalent à $\mathcal{F}$.*

(4) *Il existe un échange d'intervalles sur le cercle dont la suspension* ([3], § 6) *est équivalente à $\mathcal{F}$.*

(5) *Il existe un feuilletage équivalent à $\mathcal{F}$ qui admet une décomposition canonique « en collier »* ([3], fig. 1).

Par analogie avec la notion de composante connexe d'un feuilletage introduite par Novikov dans [7], un feuilletage satisfaisant aux conditions ci-dessus peut être qualifié de *connexe* : si en effet $\mathcal{G}$ est un feuilletage équivalent à $\mathcal{F}$ comme dans (1), deux points quelconques de M qui ne sont pas des selles appartiennent à une même courbe fermée transverse à $\mathcal{G}$. Les théorèmes 1 et 2 sont prouvés en détail dans [4].

Avant de calculer $i(\mu; \alpha)$, donnons quelques définitions (valables pour tout feuilletage, orientable ou non). Nous dirons qu'une mesure transverse est *compacte* si son support ne contient que des feuilles compactes, *anticompacte* si son support ne contient que des feuilles non compactes (et éventuellement des liaisons entre selles). Une mesure *élémentaire* est soit une mesure anticompacte ergodique, soit une mesure compacte telle que toutes les feuilles régulières contenues dans son support soient isotopes entre elles. Toute mesure μ peut s'écrire comme une somme *finie* $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_p$ de mesures élémentaires (*cf.* par ex. [4]). Si on demande que p soit minimal, cette décomposition est unique à l'ordre près et définit les *composantes élémentaires* $\mu_i (1 \leq i \leq p)$ de μ.

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orienté, et $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_p$ une mesure transverse décomposée en ses composantes élémentaires. Pour toute classe $\alpha \in H_1(M, Z)$, on a* $i(\mu; \alpha) = \sum_{i=1}^{p} |[\mu_i](\alpha)|$.

La démonstration utilise le lemme suivant :

LEMME. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orienté. Pour toute famille $\mu_1, \ldots, \mu_q$ de mesures ergodiques anticompactes deux à deux non proportionnelles, l'ensemble formé par les q-uples $([\mu_1](\alpha), \ldots, [\mu_q](\alpha))$, pour $\alpha \in H_1(M, Z)$, est dense dans $\mathbb{R}^q$.*

(Ce lemme est plus fort que le théorème II.1.1 *b* de [4], qui exprime seulement que l'ensemble considéré n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathbb{R}^q$.)

II. FEUILLETAGES NON ORIENTABLES. — Pour un feuilletage non orientable $\mathcal{F}$, il existe un revêtement à deux feuillets $p : \hat{M} \to M$, ramifié au-dessus des selles de $\mathcal{F}$ possédant un nombre impair de séparatrices, tel que le feuilletage $\hat{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ induit par p sur $\hat{M}$ soit orientable. Une mesure transverse μ de $\mathcal{F}$ détermine une mesure $\hat{\mu}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ qui est laissée invariante par l'involution σ du revêtement.

Pour calculer $i(\mathcal{F}, \mu; \alpha)$, nous allons associer à une mesure élémentaire v de $\mathcal{F}$ une classe de cohomologie $[v] \in H^1(M, R)$, bien définie au signe près. Deux cas sont possibles :

(*a*) $\hat{v}$ est une mesure élémentaire de $\hat{\mathcal{F}}$ (par exemple si $\mathcal{F}$ est le feuilletage stable d'un difféomorphisme pseudo-Anosov, car alors $\hat{\mathcal{F}}$ est uniquement ergodique). Nous posons $[v] = 0$;

(*b*) $\hat{v}$ a deux composantes élémentaires v' et $v'' = \sigma(v')$ (par exemple si v est compacte). Nous définissons alors $[v] \in H^1(M, R)$ par la relation $p^*([v]) = [v'] - [v'']$. Cette classe $[v]$ est bien définie au signe près, et n'est nulle que si le support de v se compose de feuilles compactes homologues à 0.

Dans les deux cas on a $i(\hat{\mathcal{F}}, \hat{v}; \hat{\alpha}) = |[v](p_* \hat{\alpha})|$ pour toute classe σ_*-invariante $\hat{\alpha} \in H_1(\hat{M}, Z)$, et du théorème 3 on peut déduire :

THÉORÈME 3'. — *Le théorème 3 est encore valable pour un feuilletage non orientable, à condition de définir $[\mu_i]$ comme ci-dessus.*

W. Thurston nous a montré comment utiliser sa théorie des « train tracks » pour construire un exemple non trivial du cas (*b*).

La non-ergodicité de $\hat{v}$ correspond au phénomène suivant : pour v-presque toute demi-feuille f, il existe un ouvert distingué de $\mathcal{F}$ que f (supposée orientée) traverse asymptotiquement plus souvent dans un sens que dans l'autre. La classe d'homologie duale de $[v]$ peut être considérée comme un *cycle asymptotique* car elle peut être définie géométriquement comme dans [9], théorème p. 275.

III. APPLICATIONS AUX « FEUILLETAGES MESURÉS » ET AUX DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV. — Nous considérons ici l'espace MF des feuilletages mesurés de M ([1], [11]). Il est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6} - \{0\}$ et est muni d'une mesure m invariante par l'action de $\pi_0(\mathrm{Diff}\, M)$ (*voir* par exemple [5]).

Si on fixe une classe α dans $H_1(M, Z)$, la fonction $i(\ ; \alpha) : MF \to R$ est semi-continue supérieurement. Les points où elle est continue sont précisément ceux où elle s'annule; ils forment dans MF un G_δ dense. On sait d'autre part ([5], [8]) que m-presque tout feuilletage mesuré est uniquement ergodique. On peut en fait prouver que m-presque tout feuilletage mesuré $(\mathcal{F}, \mu)$ est *fortement uniquement ergodique*, en ce sens que $(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$ est lui aussi uniquement ergodique. Donc :

THÉORÈME 4. — *L'ensemble $A \subset MF$ formé des feuilletages mesurés $(\mathcal{F}, \mu)$ tels que $i(\mathcal{F}, \mu; \alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in H_1(M, Z)$ est un G_δ dense dont le complémentaire est m-négligeable.*

Notons que A contient le feuilletage (in) stable d'un difféomorphisme pseudo-Anosov si et seulement si ce feuilletage est non orientable. Comme nous l'a fait remarquer Albert Fathi, les théorèmes 3 et 3′ peuvent être appliqués à l'étude des difféomorphismes pseudo-Anosov. Cela permet de donner une nouvelle démonstration des résultats suivants (*cf.* par exemple [2]):

THÉORÈME 5. — *Soit* φ *un difféomorphisme pseudo-Anosov de coefficient de dilatation* $\lambda > 1$, *et* φ_* *l'automorphisme induit par* φ *sur* $H_1(M, R)$;

— *si le feuilletage (in) stable de* φ *est orientable, le nombre* λ *(ou* $-\lambda$*) est valeur propre simple de* φ_*. *Les autres valeurs propres de* φ_* *sont de module strictement inférieur à* λ;

— *si le feuilletage (in) stable de* φ *n'est pas orientable, les valeurs propres de* φ_* *sont de module strictement inférieur à* λ;

— *soit* $N_n(\varphi)$ *le nombre de points fixes de* φ^n. *Alors* $\lim_{n \to \pm\infty} N_n(\varphi)/\lambda^{|n|} = 1$.

Considérons maintenant dans MF la partie T formée par les feuilletages mesurés orientables (i. e. pouvant être définis par une forme fermée). Tout feuilletage mesuré est une limite (dans MF) de feuilletages orientables; remarquons toutefois que, si une suite ω_n de formes fermées converge dans MF vers un élément de A, alors la classe de cohomologie $[\omega_n]$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Pour toute classe de cohomologie non nulle $\Omega \in H^1(M, R)$, soit $T_\Omega \subset MF$ l'ensemble des feuilletages mesurés pouvant être définis par une forme fermée $\omega \in \Omega$ (on notera que $i(\mathcal{F}, \mu; \alpha)$ est égal à la borne inférieure des nombres d'intersection de $(\mathcal{F}, \mu)$ avec les éléments de T_Ω, si Ω est duale de α; voir par exemple [8] pour le nombre d'intersection de deux feuilletages mesurés). L'union $\bigcup_{t>0} T_{t\Omega}$ est dense dans MF, mais T_Ω lui-même est loin d'être dense : son adhérence $\overline{T_\Omega}$ est d'intérieur vide. En fait l'étude des nombres d'intersection $i(\mathcal{F}, \mu; \alpha)$ est née en partie du désir de prouver que T_Ω est fermé. Nous ne savons pas si ce résultat est vrai. Remarquons cependant que $\overline{T_\Omega}$ est disjoint de A. On déduit ainsi du théorème 4 :

COROLLAIRE. — *L'union des adhérences* $\overline{T}_\Omega$, *pour* $\Omega \in H^1(M, R) - \{0\}$, *est m-négligeable.*

(*) Remise le 21 septembre 1981.

[1] A. FATHI, F. LAUDENBACH et V. POENARU, *Travaux de Thurston sur les surfaces* (*Astérisque*, n° 66-67, S.M.F. Paris, 1979).

[2] D. FRIED, *Efficiency vs. Hyperbolicity on Tori, in Global Theory of Dynamical Systems* (*Springer Lecture Notes* n° 819, Northwestern univ., 1979).

[3] G. LEVITT, *Topology*, 21, (1), 1982, p. 9-33.

[4] G. LEVITT, *Feuilletages des surfaces*, Ann. Inst. Fourier, 32, (2), 1982 (à paraître).

[5] H. MASUR, *Interval Exchange Transformations and Measured Foliations*, preprint.

[6] M. D. MEYERSON, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 61, 1976, p. 181-182.

[7] S. P. NOVIKOV, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 14, 1965, p. 268-304.

[8] M. REES, *An Alternative Approach to the Ergodic Theory of Measured Foliations on Surfaces*, preprint. I.H.E.S., 1981.

[9] S. SCHWARTZMAN, *Ann. Math.*, 66, 1957, p. 270-284.

[10] D. SULLIVAN, *Inv. Math.*, 36, 1976, p. 225-255.

[11] W. P. THURSTON, *On the Geometry and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces*, preprint.

Université Paris-VII et University of California, Berkeley.